Université ABB Tlemcen
Faculté de Technologie
Département LMD, Sciences et Techniques

Travaux Pratiques

Vibrations et Ondes

PENDULE BIFILAIRE

PENDULES COUPLES

CIRCUITS COUPLES

CORDE VIBRANTE

PENDULE DE POHL

Dr S. MERZOUK

Pendule de Pohl *(Travaux pratiques)*

Le pendule tournant de Pohl est un pendule de torsion qui décrit des mouvements oscillatoires d'enroulement et de déroulement d'un ressort en spirale autour de son axe. Ce système est muni d'un frein à courant de Foucault (amortissement réglable), et d'un moteur pour entretenir les oscillations.

Objectif : Etudier les oscillations libres amorties et forcées, puis l'influence de l'amortissement sur l'amplitude maximale en fonction la fréquence (**phénomène de résonnance**) du pendule de Pohl.

Rappels : L'équation différentielle générale qui régit l'amplitude a(t) du mouvement oscillatoire amortie et excité du pendule tournant est donnée par :

Σ Moments $= J\ddot{a} = -Ca - \beta\dot{a} + F(t)$ $\quad F(t) =$ force excitatrice $= Fo\cos\Omega t \longrightarrow \boxed{\ddot{a} + 2\gamma\dot{a} + \omega_0^2 a = A\cos\Omega t}$

$C =$ constante de torsion du pendule ; $A = \frac{Fo}{J} =$ amplitude max de l'excitateur ; $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} =$ pulsation propre

$J =$ moment d'inertie du pendule

$\beta =$ constante d'amortissement dépendant du courant de freinage ; $\gamma = \frac{\beta}{2J} =$ coeficient d'amortissement

Manipulation

- Oscillations libres

$A = 0$ (pas d'excitation) et $\gamma = 0$ (pas d'amortissement) $\longrightarrow \boxed{\ddot{a} + \omega_0^2 a = 0}$ $\quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} =$ période propre $= 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$

On écarte le pendule d'une amplitude a initiale par rapport à sa position d'équilibre (on vérifie qu'au repos: ao = a(t=0) = 0) et on le lâche sans vitesse initiale.
Mesurer le temps t de n oscillations (n = 5 par exemple) avec un chronomètre. La période propre du pendule est alors To = t/n.
On fera 3 mesures pour a = 3 ; a = 4 et a = 5, puis on prendra la moyenne de ces mesures d'où fo = fréquence propre = 1 / To

- Oscillations libres amorties $\longrightarrow \ddot{a} + 2\gamma\dot{a} + \omega_0^2 a = 0$

Les solutions de cette équation dépendent du signe du discriminent Δ' de son équation caractéristique.
L'expérience est réalisée avec des faibles amortissements, c'est-à-dire dans le cas:

$\Delta' = \gamma^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \gamma^2) = -\omega^2 < 0 \longrightarrow$ solution pseudo-périodique $a(t) = a_{max}e^{-\gamma t}\cos\omega t$: régime oscillatoire amorti

avec :

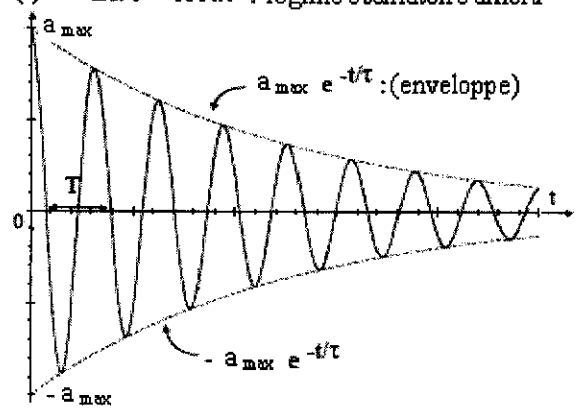
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} =$ pseudopulsation

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} =$ pseudopériode $> T_0$

$\tau =$ constante de temps $= \frac{1}{\gamma}$

$\delta =$ décrément logarithmique $= \text{Log}\frac{a(t)}{a(t+T)} = \text{Log}\, e^{\gamma T} = \gamma T = \frac{T}{\tau}$

(δ définie la décroissance des amplitudes max)



Pour différents courants de freinage I du générateur de courant branché aux bornes des bobines, écarter le pendule d'une amplitude $a_{max} = 10$ (à t = 0) et lâcher.
- Relever alors les amplitudes maximales des demis oscillations se succédant sur le même côté, puis mesurer le temps t de n oscillations (n =5 par exemple) correspondant d'où la pseudo période T = t / n

I= 0,3A	$a_{max}(t=0)$	$a_{max}(t=T)$	$a_{max}(t=2T)$	$a_{max}(t=3T)$	T = t / n
I = 0,3A	10				
I = 0,7A	10				
I = 1 A	10				

- Tracer les courbes donnant l'amplitude en fonction du temps a(t) pour chaque valeur de I.
- En déduire le décrément logarithmique et le coefficient d'amortissement correspondant à chaque courbe.

Pendule de Pohl *(Travaux pratiques)* suite

- **Oscillations forcées non amorties** ($\gamma = 0$) $\longrightarrow$ $\ddot{a} + \omega_0^2 a = A \cos \Omega t$

Pour entretenir les oscillations libres (I = 0) , on utilise un moteur à courant continu.
Un voltmètre raccordé aux bornes du moteur permet de mesurer la tension d'excitation Uex qui est proportionnelle à la fréquence d'excitation fex ($\Omega = 2\pi$ fex)

- Mesurer le temps t de n tours (par exemple t = 5Tex $\rightarrow$ fex).
- En déduire les valeurs d'étalonnage fex = f(Uex),

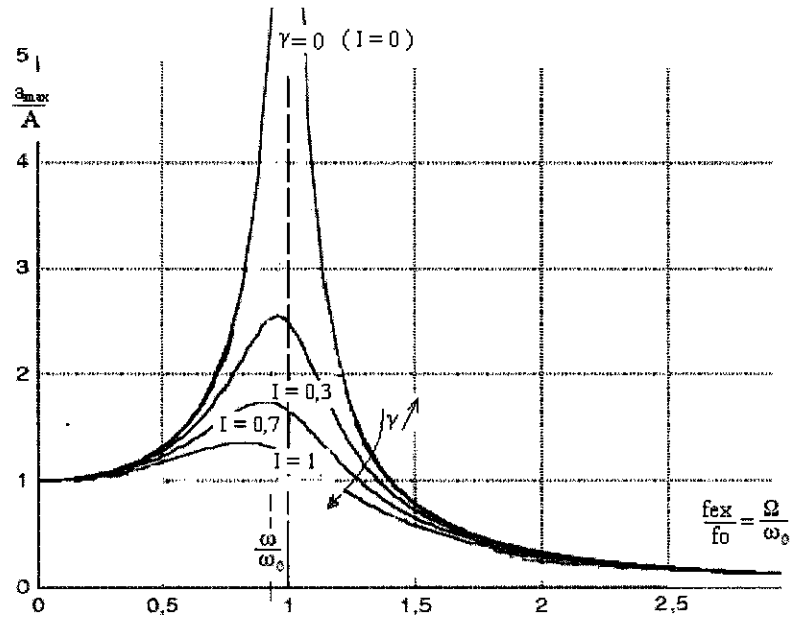
Uex (Volt)	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
T = 5 Tex fex = 1 / Tex fex / fo I = 0 $\rightarrow$ a_{max} / A							

- Tracer la courbe de résonance a_{max} / A = f (fex/fo) (sans d'amortissement)
a_{max} = amplitude maximale du pendule
A = amplitude maximale de l'excitateur (suppose constante $\approx$ **0,5**)
(pour le réglage de la tension d'excitation, on utilisera les potentiomètres gros réglage et réglage fin)
Remarque : En prenant pour Uex les valeurs allant de 4 à 8 Volts, on localisera exactement la tension pour laquelle il y a résonnance (a_{max} très grand, attention au matériel !)

Oscillations forcées amorties $\rightarrow$ équation générale
Pour différents courants de freinage I du générateur de courant branché aux bornes des bobines
Mesurer pour chaque tension les amplitudes max du pendule

Uex (Volt)	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
fex / fo			déjà	fait			
I = 0,3 $\rightarrow$ a_{max} / A I = 0,7 $\rightarrow$ a_{max} / A I = 1 A $\rightarrow$ a_{max} / A							

Tracer sur un même graphique toutes les courbes de résonance a_{max} / A = f (fex/fo)



Conclusion

Corde Vibrante *(Travaux pratiques)*

Objectif

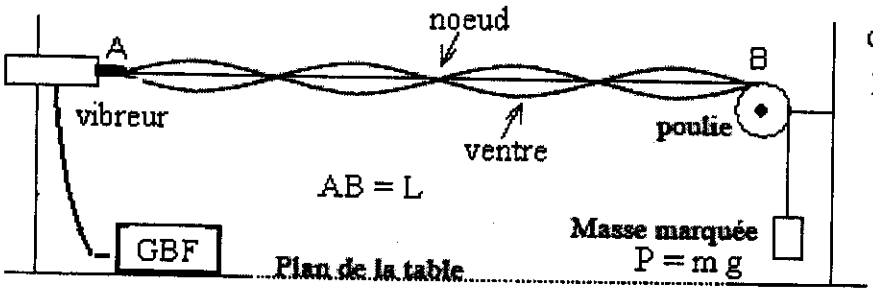
Etude des ondes stationnaires le long d'une corde tendue soumise à des vibrations transversales.

Dispositif expérimental

Un vibreur de fréquence variable agite l'extrémité A d'une corde (ou ficelle) tendue, entre les points A et B par une masse m. La longueur L = AB de la corde est réglable. On peut modifier la tension F de la corde, égale au poids F = P = mg de la masse marquée accrochée, en changeant cette dernière.
Lorsqu'un système d'ondes stationnaires est établi le long de la corde, les points fixes sont des nœuds de vibration. On appelle fuseau (ventre) la portion de corde comprise entre deux nœuds consécutifs.

La longueur d'un fuseau vaut $\lambda/2$ $\longrightarrow$ $\boxed{L = n\,\lambda/2}$ = n fuseaux = n modes (n est un entier positif)

La fréquence des modes propres de vibration de la corde de longueur L est $f = n\,v / 2L$ $\longrightarrow$ $\boxed{\lambda f = v}$



d'autre part, dans notre cas on démontre que la vitesse v de propagation de l'onde est donnée p

$$v = \sqrt{\frac{P}{\mu}} = \lambda f = \frac{2L}{n} f \longrightarrow f^2 = \frac{n^2 g}{4\,\mu L^2}$$

avec μ = masse linéaire de la corde

Manipulation

1- Détermination des modes propres de vibration de la corde

Prendre L = 1 m, et m = 100 g

Faire varier progressivement la fréquence (des vibrations) de la tension délivrée par le GBF et rechercher les valeurs des quatre fréquences notées f_1, f_2, f_3, et f_4 permettant d'obtenir respectivement un, deux, trois et quatre fuseaux stables le long de la corde.

Fréquences (Hz)	f_1 =	f_2 =	f_3 =	f_4 =
n = nombre de fuseaux	1	2	3	4
$\lambda = 2L / n$				

- Comment le nombre de fuseaux évolue-t-il lorsque la fréquence augmente.
- Calculer les rapports : $\frac{f_2}{f_1}$; $\frac{f_3}{f_1}$; $\frac{f_4}{f_1}$. Que peut-on en conclure ?
- Pour f_2 indiquée déterminer la valeur λ_2 de la longueur d'onde correspondante. En déduire la valeur v_2 de la vitesse de l'onde. Même question pour f_3
- Comparer alors v_2 et v_3. Le résultat de la comparaison était-il prévisible ? Justifier.

2- In fluence de la longueur L sur la vitesse

Prendre m = 100 g et pour n = 1

Fréquences (Hz)				
L (m)	0,5	0,7	0,9	1,1
f . L				

Qu'observez-vous du produit f.L. Expliquer.

3- Détermination de la masse linéaire

Prendre L = 1 m et pour n = 2

Fréquences (Hz)				
Masse m (g)	100	150	200	250
f^2				

- Tracer la courbe f^2 en fonction de m. Vérifier que c'est une droite, calculer sa pente et en déduire **μ.**
- Comparer ce résultat avec la valeur donnée par le fournisseur **(μ_o = 4,3 g/m)** en calculant :

la déviation en % = $(\mu_o - \mu) / \mu_o$.

Circuit Couplé *(Travaux pratiques)*

1. Circuit oscillant

Faire le montage du circuit RLC oscillant
Régler une tension **Ecc (crête à crête) = 20 Volt = 2.Emax = 2.E.√2** , grâce à l'oscilloscope, en déduire la tension efficace E qu'on utilisera pour toute la manipulation
Le condensateur est choisi C = 0.01 μF
Tracer la courbe de résonance du courant I en fonction de la fréquence f :

f(kHz)	8	10	11	12	13	14	16
I(mA)							

En déduire la fréquence de résonance f_0 et Imax correspondant

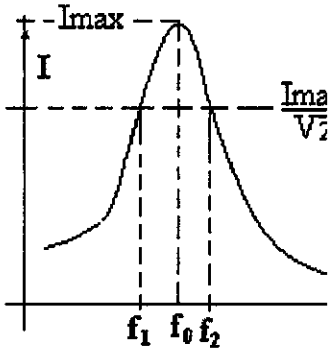
Mesurer sur le graphe la largeur de la bande passante $B = f_2 - f_1$ à 3 décibels,

et déduire le cœfficient de qualité Q,

l'inductance L et la résistance R du circuit

On rappel le coefficient de qualité du circuit $Q = \frac{f_0}{B} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$

Avec à la résonance $\omega_0 = 2\pi.f_0$ $\quad LC\omega_0^2 = 1$ $\quad E = R.Imax$



2. Circuit couplé

Faire le montage du circuit couplé
Fixer la fréquence du générateur E à la fréquence de résonance f_0 trouvé (ci-dessus) et mesurer avec l'oscilloscope la tension Vcc aux bornes de C' (C' =C) du circuit libre (non alimenté) pour différentes valeurs de la distance d séparant les bobines

d(cm)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3...
Vcc (volts)							

Tracer la courbe Vcc(d)

3. Circuit série, une mesure de la mutuelle inductance M

Faire le montage du circuit série
On fera d =0, c'est-à-dire coller les bobines montées en séries l'une contre l'autre
Premier temps :
Soit le courant circule dans le même sens dans les enroulements des 2 bobines, alors les flux Ldi/dt et Mdi/dt sont additifs, et à la résonance on montre que

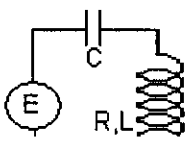
$$L + M = 1/2C\omega_1^2 \qquad (1)$$

Trouver expérimentalement cette fréquence de résonance f_1 ($\omega=2\pi.f$)
Deuxième temps :
Croiser les connexions A et B de l'une des bobines, alors les courant dans les enroulements des bobines circulent en sens inverse, les flux sont soustractifs, et à la résonance on montre que

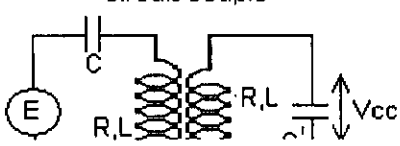
$$L - M = 1/2C\omega_2^2 \qquad (2)$$

Trouver expérimentalement cette fréquence de résonance f_2
Déduire M à partir de ce système d'équation (1) et (2), puis le coefficient de couplage **K = M/L**
Comparer ainsi K avec 1 / Q (Q étant trouvé dans la première question) et dire le type de couplage,
on rappel : Couplage lâche critique serré
0 ---------- 1/Q ----------> 1

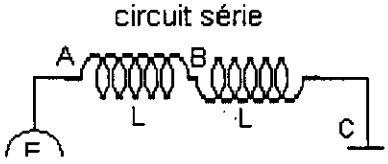
circuit oscillant



circuit couplé

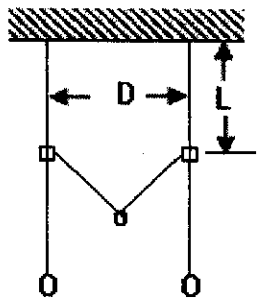


circuit série



Pendules Couplés (couplage par inertie) *(Travaux pratiques)*

Le système mécanique utilisé comporte 2 pendules identiques constitués chacun d'une tige pourvue d'une masse et d'un crochet coulissant. Un fil portant une masse, attaché aux crochets, forme un couplage dynamique par inertie mettant en évidence l'échange d'énergie entre les 2 pendules oscillants.



On montre que les équations du mouvement (petites oscillations) des 2 pendules couplés sont donnés par :

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\ \theta_1 = K\ \omega_0^2\ \theta_2$$
$$\ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\ \theta_2 = K\ \omega_0^2\ \theta_1$$

avec θ_1 et θ_2 angles des pendules en mouvement avec la verticale
ω_0 pulsation propre des pendules sans couplage
et K coefficient de couplage ≤ 1

La résolution de ce système d'équations différentielles fait apparaître que les pendules peuvent osciller :
- soit en phase ou en opposition de phases correspondant à 2 modes propres de pulsations :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2(1-K) \quad \text{ou} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2(1+K) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K = \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^2 - 1 = 1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2}$$

- soit avec un phénomène de battement de pulsation : $\mathbf{\Omega = (\omega_1 - \omega_2) / 2}$; $\mathbf{(\omega = 2\pi / T)}$

Manipulation

1) Le couplage étant enlevé, mesurer la période T_0 de chaque pendule.
Les périodes seront vérifiés pratiquement égales.
2) Remonter les extrémités du fil portant la petite masse aux crochets (couplage). Pour chaque réglage de D ou de L nous avons un couplage différent. On regroupera les mesures dans le tableau suivant :

D(cm)	30				60			
L(cm)	30	40	50	60	30	40	50	60
$T_1 \Rightarrow \omega_1 = 2\pi/T_1$								
$T_2 \Rightarrow \omega_2 = 2\pi/T_2$								
$T \Rightarrow \Omega = 2\pi/T$								
$K = (T_0/T_2)^2 - 1$								

Détermination expérimentale de T_1

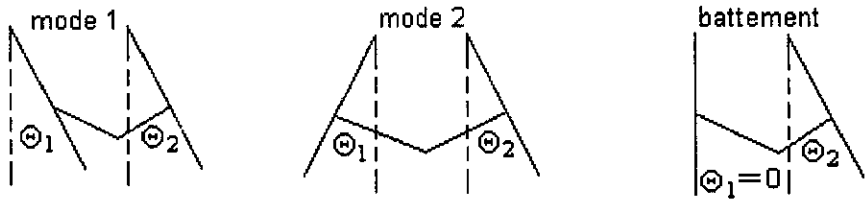
T_1 est la période du mode d'oscillation lorsque les pendules oscillent en phase avec la même amplitude. Ecarter simultanément, d'un petit angle, les pendules du même côté de la verticale et les lâcher au même instant. Mesurer le temps $t_1 = nT_1$ de n oscillations (par exemple n= 20) d'où T_1

Détermination expérimentale de T_2

T_2 est la période du mode d'oscillation lorsque les pendules oscillent en opposition de phase avec la même amplitude. Ecarter simultanément, d'un petit angle, les pendules de par et d'autre de la verticale et les lâcher au même instant. Mesurer le temps $t_2 = nT_2$ de n oscillations (par exemple n= 20) d'où T_2

Détermination expérimentale de T

Ecarter l'un des pendules de sa position d'équilibre tandis que l'autre est laissé vertical et lâcher. Le système oscille en battement. Mesurer le temps T = période de battement, séparant 2 arrêts consécutifs d'un même pendule choisit.

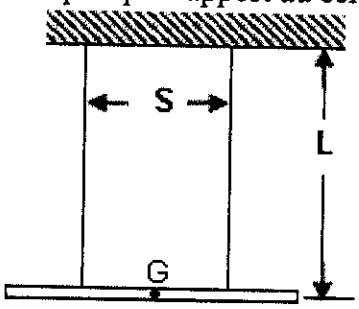


Conclusion

Le tableau obtenu donne les correspondances entre les L, les K, les ω_1, les ω_2, et les Ω .
Tracer la courbe $\mathbf{K = f(L)}$ pour déduire la variation du couplage avec L.
Tracer les courbes $\mathbf{\omega_1 = f_1(K)}$, $\mathbf{\omega_2 = f_2(K)}$ **et** $\mathbf{\Omega = f_3(K)}$ pour déduire la variation des modes et battement avec le couplage.

Pendule Bifilaire *(Travaux pratiques)*

Le pendule bifilaire est constitué d'une barre homogène de section constante suspendue horizontalement un support fixe par l'intermédiaire de 2 fils parallèles (verticaux distant de S et de même longueur L symétriques par rapport au centre de gravité G de la barre.



Certains systèmes sont difficilement accessibles par la théorie, on propose une détermination expérimentale de la loi qui régit la période de ce pendule (par analogie avec le pendule simple) selon la formule empirique

$$\mathbf{T = K.L^{m}.S^{n}}$$

Nous observons et étudions 3 mouvements possibles de ce pendule :

- mouvement de rotation : la barre est tournée avec un petit angle θ_r par rapport à un axe verticale passant par G puis relâchée => $\mathbf{T_r = K_r . L^{mr} . S^{nr}}$
- mouvement balançoire : la barre est écarté vers l'avant ou l'arrière avec un petit angle θ_b par rapport au plan verticale du pendule au repos puis relâchée => $\mathbf{T_b = K_b . L^{mb} . S^{nb}}$
- mouvement pendulaire : la barre est écartée vers la gauche ou la droite avec un petit angle θ_p dans le plan verticale du pendule au repos puis relâchée => $\mathbf{T_p = K_p . L^{mp} . S^{np}}$

Les constantes m, n et K (d'indices r, b, et p) correspondant aux différents mouvements sont déterminés graphiquement.

Manipulation

Détermination des constantes m : On fait l'étude de T à S constant, on choisit une valeur fixe de S (par exemple 50 cm) et on mesure le temps **t = n.T** = nombre d'oscillations = 20 par exemple, pour différentes valeurs de L et pour les 3 mouvements, d'où les périodes T correspondantes :

L(cm)	80	60	40	20
$\mathbf{T_r \Rightarrow Log\ T_r}$				
$\mathbf{T_b \Rightarrow Log\ T_b}$				
$\mathbf{T_p \Rightarrow Log\ T_p}$				
Log L				

On a pour chaque mouvement (indice) : $LogT = Log(K.L^m.S^n) = LogK.S^n + mLogL = C_S + mLogL$

Tracer sur un même graphe les droites **y = LogT** = f(**LogL**) = f(**x**) des 3 mouvements

En déduire graphiquement les constantes m des 3 mouvements et les approximer aux nombres entiers ou demis entiers les plus proches.

Détermination des constantes n : On fait l'étude de T à L constant, on choisit une valeur fixe de L (par exemple 80 cm) et on mesure le temps **t = n.T** = nombre d'oscillations = 20 par exemple, pour différentes valeurs de S et pour les 3 mouvements, d'où les périodes T correspondantes :

S(cm)	55	45	35	25
$\mathbf{T_r \Rightarrow Log\ T_r}$				
$\mathbf{T_b \Rightarrow Log\ T_b}$				
$\mathbf{T_p \Rightarrow Log\ T_p}$				
Log S				

On a pour chaque mouvement (indice) : $LogT = Log(K.L^m.S^n) = LogK.L^m + nLogS = C_L + nLogS$

Tracer sur un même graphe les droites **y = LogT** = f(**LogS**) = f(**x**) des 3 mouvements

En déduire graphiquement les constantes n des 3 mouvements et les approximer aux nombres entiers ou demis entiers les plus proches.

Détermination des constantes K

Les constantes m et n des 3 mouvements étant maintenant connus, en déduire en utilisant à nouveau les graphes, les constantes K de chaque mouvement à partir de $C_S = LogK.S^n$ et de $C_L = LogK.L^m$, (C_S et C_L sont les intersections des droites f(x) avec l'axe y)

Comparer et prendre le K moyen correspondant à chaque mouvement.

Conclusion

Ecrire les expressions finales des périodes des 3 mouvements harmoniques (petites oscillations) possibles du pendule bifilaire.