

Université Aboubekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique et Electronique
GEE

Module Commande Numérique.

Par A.Meghebbar

Introduction aux systèmes linéaires numériques.

L'utilisation des calculateurs numériques utilisés en temps réel pour commander, piloter, guider...des procédés ou systèmes physiques qui par essence sont le plus souvent continus a donné naissance aux systèmes commandés échantillonnés (discrets/numériques). La commande par ordinateur, ou processeur, d'un procédé nécessite la mise en œuvre d'un certain nombre d'éléments :

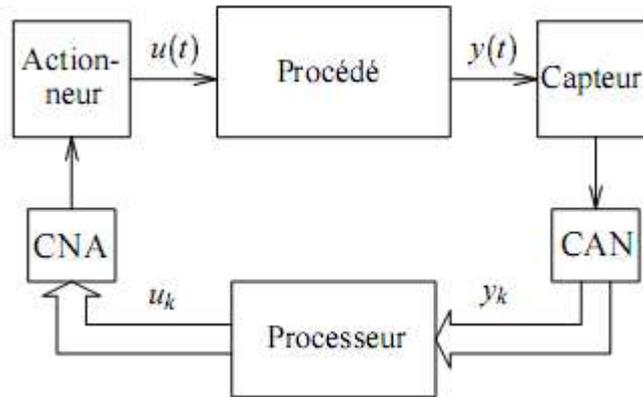


Figure 1 : Structure de commande d'un système continu par ordinateur.

- Un processeur (ordinateur) qui élabore la commande u_k et réalise l'échantillonnage,
- Des convertisseurs analogique-numériques, CAN.
- Des capteurs ou organes de mesure qui transmettent au calculateur les informations recueillies sur le système continu, à travers les convertisseurs analogiques numériques,
- Des convertisseurs numérique-analogiques, CNA.

Un convertisseur N/A consistera à maintenir constante sur l'intervalle $[kT, (k+1)T]$ la commande soit :

$$u(t) = u(kT) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T]$$

Un tel convertisseur est appelé **Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ)**.

Intérêts de la commande par ordinateurs.

La souplesse d'utilisation du calculateur (machine programmable) à la place d'un correcteur analogique (machine câblée) est remarquable :

- La flexibilité de la programmation permet de réaliser des correcteurs finis, facilement ajustables et auto-ajustables,

- Fourni une grande précision, résoud de problème de complexité (grand nombre de paramètres), augmente les rendements, améliore les performances, etc....

Etapas de mise en œuvre de la commande par calculateurs.

- Choix la période d'échantillonnage,
- Détermination du correcteur numérique à partir d'un cahier de charge,
- Le correcteur, calculé en général dans le domaine fréquentiel, conduit, par retour au domaine temporel au programme du calculateur (loi de commande). Il élabore en temps réel la commande qu'il enverra à chaque instant ou pas d'échantillonnage au processus. L'évolution du système dépend alors à chaque instant des résultats élaborés par le calculateur ; on parle de commande par calculateurs en temps réel.

Comparaison : correction analogique/correction numérique.

	Numérique	Analogique
Avantages	<ul style="list-style-type: none"> - capacité de mémoire sans limite, - grande possibilité de synthèse de la récurrence (algorithme), - algorithme adaptable, - mise au point souple, - convivialité (dialogue) et sécurité (séquentiel). 	<ul style="list-style-type: none"> - le système est observé en continu (adapté aux systèmes rapides), - précis.
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none"> - la boucle est ouverte en dehors des instants d'échantillonnage (! oscillations non observées), - discrétisation de la mesure (précis à $q = \frac{PE}{2^N}$), ! non linéaire : risque de cycle limite, - compromis f_e / N (nombre de bits), pas encore adapté aux systèmes rapides (Shannon). 	<ul style="list-style-type: none"> - structure rigide ; PID(ou approchée), - possibilité de synthèse réduite, - mise au point et adaptation difficile, - d'un point de vue technologique (valeurs des composants), non adapté aux systèmes lents.

Chapitre 1. Modélisation des signaux et systèmes discrets et/ou échantillonnés. (Approche fréquentielle).

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement (calculateurs numériques). Ces outils ne peuvent à aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités.

On parle de systèmes et de signaux à temps discrets par opposition à la notion de temps continu.

La transformation d'un signal continu en signal discret nécessite un échantillonnage, qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis une conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres codés.

1.1 Echantillonnage :

Le découpage temporel de l'information qu'est l'échantillonnage est certainement la caractéristique la plus importante de l'insertion des calculateurs dans la commande des processus.

Le terme échantillonné est réservé aux signaux (systèmes) dont une variable au moins est l'objet d'une quantification temporelle.

Le terme numérique est réservé aux signaux (systèmes) dont une variable au moins est l'objet d'une double quantification à la fois en temps et en amplitude (la quantification en amplitude est appelée codage).

L'échantillonnage d'un signal temporel $s(t)$ consiste donc à transformer celui-ci en une suite discrète $s_k \equiv s(k)$ de valeurs prises à des instants kT , T_e est appelée période d'échantillonnage.

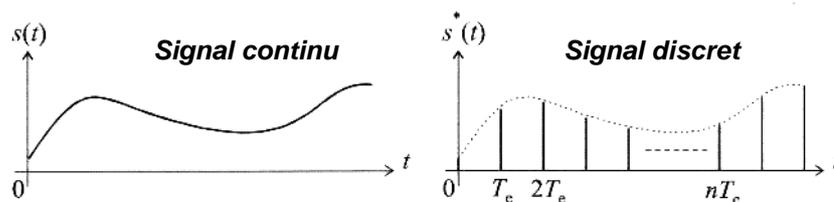


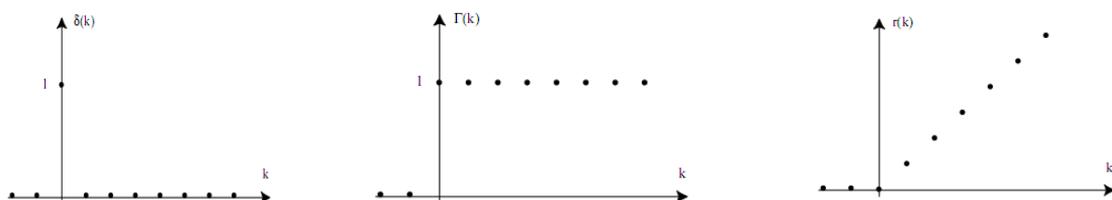
Figure 1.1 Echantillonnage d'un signal quelconque $s(t)$.

$s^*(t)$ est le signal $s(t)$ échantillonné aux instants kT , il est défini par :

$$s^*(t) = s(t) \cdot p(t); p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \text{ D'où } s^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT)$$

$p(t)$ porte le nom de *peigne de Dirac*.

Exemples de signaux échantillonnés.



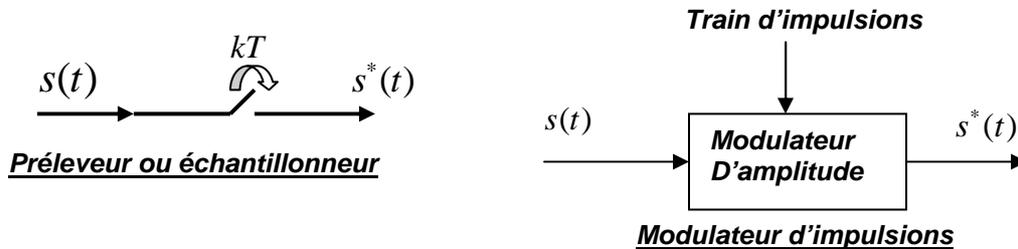
Impulsion de Dirac.

Echelon unitaire.

Rampe ou échelon de vitesse.

Figures 1.2 Exemples de signaux échantillonnés simples.

Exemples d'échantillonneurs :



1.2 Règle pratique de l'échantillonnage :

Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il est possible, à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstruire celui du signal original.

Le spectre du signal de départ donné par la Transformée de Fourier:

$$s^*(t) \rightarrow S^*(f) * f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e)$$

f_e est la fréquence d'échantillonnage,

B est la largeur spectrale du signal.

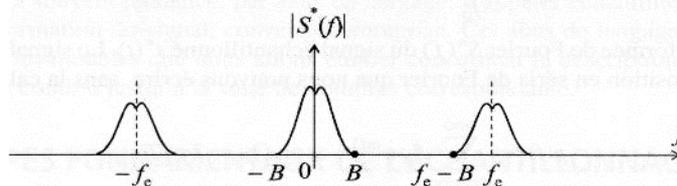


Figure 1.3 Spectre d'un signal échantillonné.

Si B est la largeur spectrale du signal $s(t)$, autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de $s^*(t)$, qui se trouve centré sur la fréquence f_e , s'étend de $f_e - B$ à $f_e + B$.

La condition de non recouvrement est donc :

$B < f_e - B$ soit $f_e > 2B$. Cette inégalité constitue le théorème de Shannon : la fréquence

d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T}$ doit être choisie grande ou égale à deux fois la fréquence haute de la bande du processus à commander.

Choix de la période d'échantillonnage pour le cas des systèmes régulés :

- T ne doit pas être trop grand ; sinon le calculateur pourra rater des informations importantes en provenance de la sortie ou commander trop peu souvent le système, courant le risque de ne pouvoir rattraper des erreurs importantes, et de déstabiliser le système asservi.

- T ne doit pas être trop petit : sinon le calculateur consacre inutilement trop de temps au système qu'il pilote, le corrigeant par petit coups souvent répétés.

$$F = \frac{1}{T} \geq 2F_m ; F_m : \text{fréquence maximale contenue dans le spectre d'amplitude de sa réponse en fréquences.}$$

1 ^{er} ordre	2 ^{eme} ordre
$\frac{K}{1 + \tau p}$	$\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$
Fréquence de coupure haute : $\frac{1}{2\pi\tau}$	Fréquence de coupure haute : $\frac{\omega_n}{2\pi}$ (pour $\xi = 0.7$)
$\frac{1}{4} \leq \frac{T}{\tau} \leq 1$	$0.25 \leq T\omega_n \leq 1.25$

1.3 Reconstitution d'un signal échantillonné. Bloqueurs.

Il s'agit de reconstituer $s(t)$ à partir des échantillons $s(kT)$ pour $kT \leq t$. Le développement en série de Taylor de $s(t)$ au voisinage de $t = kT + \varepsilon$ est la base de la méthode.

$$s(kT + \varepsilon) = s(kT) + \varepsilon s'(kT) + \frac{\varepsilon^2}{2} s''(kT) + \dots$$

On évalue avec une certaine approximation les dérivées successives par des différences finies :

$$s'(kT) \approx \frac{1}{T} [s(kT) - s((k-1)T)]$$

$$s''(kT) \approx \frac{1}{T^2} [s(kT) - 2s((k-1)T) + s((k-2)T)]$$

Cette reconstitution exige un lissage du signal échantillonné ; ceci est réalisé par un bloqueur

d'ordre zéro, de fonction de transfert $B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$.

Ce circuit a pour action de maintenir constante et égal à $s(k)$ l'amplitude de l'impulsion entre les instants kT et $(k+1)T$.

Le calculateur assure, en plus du contrôle numérique, la fonction de comparateur (numérique).

1.4 Transformée en z .

Dans le cas des signaux causaux (signal nul pour t négatif), on définit la transformée en z du signal $s(t)$ par :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot z^{-k} ; z \text{ est complexe comme } p, (z = e^{pT}).$$

Méthodes de calcul de la transformée en z :

- Par définition : $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot z^{-k}$,

- **Méthode des Résidus** : $S(z) = \sum_{\text{poles de } S(p)} \left[\text{Résidus de } \frac{S(p)}{1 - e^{-Tb} \cdot z^{-1}} \right]$
- Avec $R(b) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[(p-b)^n \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(p-b)}} \cdot S(p) \right]$; $R(b)$ étant un résidu.
- **Décomposition en éléments simples et utilisation des tables de transformées.**

Propriétés :

- **Linéarité** : $TZ(ax + by) = aX(z) + bY(z)$
- **Transforme la convolution en produit** : $TZ(x * y) = X(z) \cdot Y(z)$
- **Retard** : $TZ(s(k - k_0)) = z^{-k_0} \cdot S(z)$
- **Avance** : si $y(k) = x(k + k_0)$ on a

$$Y(z) = z^{k_0} \left[X(z) - x(0) \cdot z^0 - x(1) \cdot z^1 - \dots - x(k_0 - 1) \cdot z^{k_0 - 1} \right]$$
- **Multiplication** : $a^k TZ(a^k \cdot s(k)) = S\left(\frac{z}{a}\right)$
- **Sommation** : $TZ\left[\sum_{i=0}^{\infty} s_i\right] = \frac{z}{z-1} S(z)$
- **Théorème de la valeur initiale** : $s(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} S(z)$
- **Théorème de la valeur finale** : $s(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})S(z)$

Transformées en z des signaux usuels :

Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$	Signal continu $f(t)$	Signal échantillonné f_k	Transformée en z $F(z) = \mathcal{Z}[f_k]$
1	$\delta(t)$	$f_0 = 1, \forall k \neq 0 \quad f_k = 0$	1
e^{-ap}	$\delta(t-a)$		
e^{-hTp}	$\delta(t-hT)$	$f_h = 1, \forall k \neq h \quad f_k = 0$	z^{-h}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	kT	$T \frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{p^3}$	t^2	$k^2 T^2$	$T^2 \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
		a^k	$\frac{z}{z-a}$
		$(-a)^k$	$\frac{z}{z+a}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

Transformée en z modifiée :

$$S(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m) \cdot z^{-k} \quad \text{avec } 0 \leq m \leq 1$$

1.5 Fonction de transfert en z d'un système discret :

Un système discret est régi ou défini par une équation de récurrence (équation aux différences) entre son entrée $e(k)$ et sa sortie $s(k)$. Cette équation est de la forme :

$$a_n s(k-n) + a_{n-1} s(k-n-1) + \dots + a_1 s(k-1) + a_0 s(k) = b_m e(k-m) + \dots + b_1 e(k-1) + b_0 e(k)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k s(n-k) = \sum_{k=0}^m b_k e(k-m)$$

L'ordre du système étant $n \geq m$ (système causal).

Exemples d'équations de récurrences :

$$s(k-2) + 3s(k-1) + 5s(k) = e(k-1) + e(k)$$

$$s(k-2) + 3s(k)s(k-1) + s^2(k) = e(k)$$

$$s(k-2) + 6s(k-1) + 2s(k) = 5e(k)$$

$$s(k-2) + k^2 s(k-1) - ks(k) = 3e(k)$$

Respectivement des équations de récurrence d'un deuxième ordre, linéaire, non linéaire invariant et variant.

On remarque que l'on peut calculer de proche en proche toutes les valeurs de la sortie $s(k)$, si on connaît l'entrée $e(k)$ et les conditions initiales.

L'utilisation de la transformée en z (la propriété de décalage temporel) permet d'établir la fonction de transfert du système :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^m a_k z^{-k}} = \frac{b_m z^{-m} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-n} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0} \quad \text{CI nulles.}$$

La fonction de transfert $G(z)$ est une fraction rationnelle : $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

$N(z)$ et $D(z)$ sont des polynômes en z^{-1} de degrés respectifs n et m .

Réponse d'un système :

On peut connaître la réponse d'un système à une entrée donnée en formant la transformée inverse de $G(z).E(z)$.

Exemple : soit un système défini par son équation de récurrence :

$s(k+1) - 0.5s(k) = e(k)$ avec comme conditions initiales : $s(0) = 0$ et l'entrée est un échelon unitaire.

On peut calculer la sortie $s(k)$ soit :

- de proche en proche:

$$s(1) = 0.5s(0) + e(0) = 1$$

$$s(2) = 0.5s(1) + e(1) = 1.5$$

$$s(3) = 0.5s(2) + e(2) = 1.75$$

...

- avec la transformée en z :

$$S(z) = G(z).E(z) = \frac{1}{z-0.5} \cdot \frac{z}{z-1}$$

En décomposant en éléments simples $G(z)/z$, on trouve :

$$S(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0.5} \Rightarrow s(k) = 2 - 2(0.5)^k$$

Remarque : Plus l'ordre d'un système est élevé, plus sa réponse va tarder à se manifester.

Retard pur :

Les systèmes peuvent présenter un retard pur qui se manifeste dans l'équation de récurrence par l'apparition de termes en $e(k-r)$ où r est le retard en nombre de période d'échantillonnage.

Exemple : le système défini par l'équation de récurrence :

$s(k+3) + 3s(k+2) + 2s(k+1) + s(k) = e(k+1) + 2e(k) + e(k-1) + e(k-2)$ est d'ordre 3 et présente un retard de 2 pas ou périodes d'échantillonnage (par la présence du terme $e(k-2)$).

Le système d'entrée $e(k)$, de sortie $s(k)$; et de fonction de transfert $G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$ présente un retard pur de r périodes d'échantillonnage, si $G(z)$ peut se mettre sous la forme $G(z) = z^{-r} G_1(z)$

Fonctions intégrale et dérivée en numérique :

- **Fonction dérivée :**

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt} \rightarrow y(k) = \frac{u(k) - u(k-1)}{T} = u(k) \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right),$$

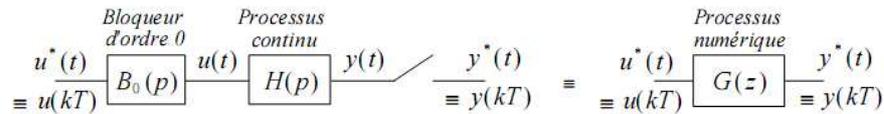
La fonction de transfert « dérivée » est donc : $\left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right)$.

- **Fonction intégrale :**

$$y(t) = \int u(t) dt \rightarrow y(k) = \sum_0^k Tu(k) \Rightarrow y(k)(1 - z^{-1}) = Tu(k)$$

La fonction de transfert « intégrale » est donc : $\left(\frac{T}{1 - z^{-1}} \right)$.

1.6 Fonction de transfert numérique d'un processus analogique muni d'un Bloqueur d'Ordre Zéro :
Un processus numérique $G(z)$ issu de la numérisation d'un processus continu $G(p)$ s'obtient par synthèse par invariance indicielle :



$$\text{avec: } G(z) = Z[B_0(p)H(p)] = Z\left[\left(\frac{1-e^{-pT}}{p}\right)H(p)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right] \quad \boxed{G(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]}$$

• **Modèle numérique du 1^{er} ordre :**

Le modèle numérique $G(z)$ du 1^{er} ordre est obtenu par échantillonnage-blocage d'un processus analogique $A(p)$ du 1^{er} ordre :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{A(p)}{p}\right], \text{ (Synthèse par invariance indicielle). } G(z) = Z[B_0(p).A(p)]$$

1^{er} ordre analogique : $A(p) = \frac{K}{1+\tau p}$

1^{er} ordre numérique : $G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{A(p)}{p}\right] = \frac{b_0}{z+a_0}$ (cf. Tables) avec : $\begin{cases} b_0 = K(1+a_0) \\ a_0 = -e^{-\frac{T}{\tau}} \end{cases}$

La fonction de transfert $G(z)$ est aussi du 1^{er} ordre. Elle dépend fondamentalement de T .

$G(z)$ a pour pôle : $-a_0 = e^{-T/\tau} = e^{-p_0 T}$ avec : $p_0 = -\frac{1}{\tau}$: pôle du système analogique.

• **Modèle numérique du 2^{ème} ordre :**

2nd ordre analogique : $A(p) = \frac{1}{1+2\xi\frac{p}{\omega_n} + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$ (modèle avec gain statique égal à 1)

ξ : amortissement (noté aussi m) ω_n : pulsation propre (notée aussi ω_0)

2nd ordre numérique : $G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{A(p)}{p}\right]$ (cf. Tables) $G(z) = Z[B_0(p)A(p)]$

La forme polynomiale donne directement les coefficients de la récurrence :

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} ;$$

La forme pôles et zéros autorise une équation évaluation des performances dynamiques :

$$G(z) = b_1 \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1)}$$

Avec :

$$\alpha = e^{-\xi\omega_n T}$$

$$\omega'_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$a_0 = \alpha^2$$

$$a_1 = -2\alpha \cos(\omega_n T)$$

$$b_0 = \alpha^2 + \alpha \left[\xi \frac{\omega_n}{\omega'_n} \sin(\omega'_n T) - \cos(\omega'_n T) \right]$$

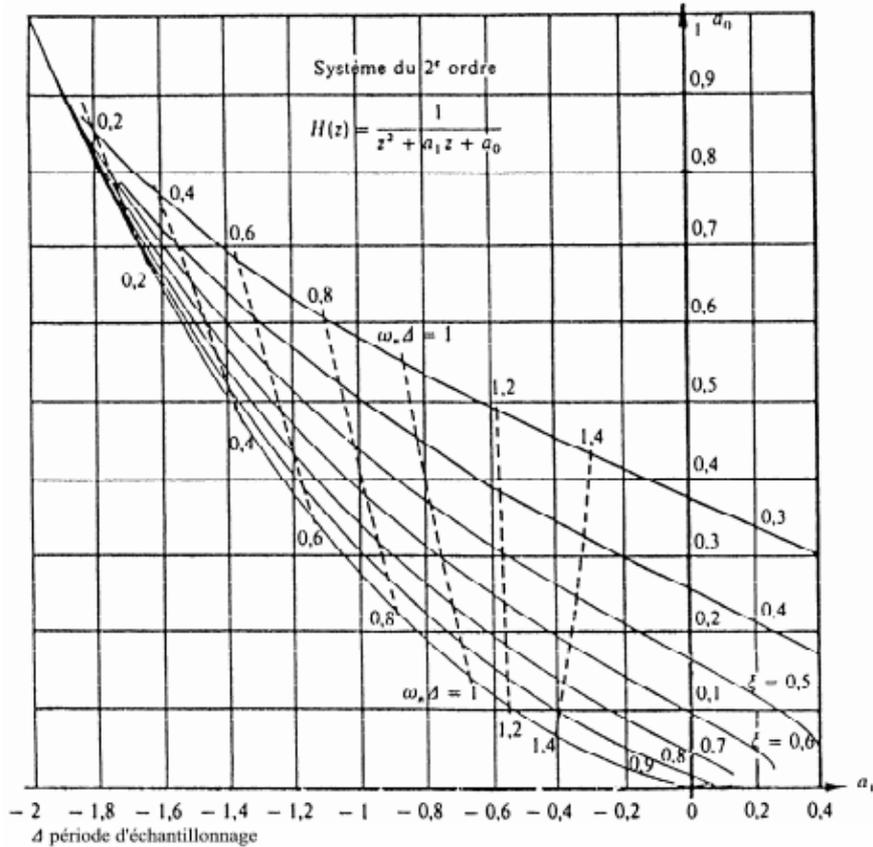
$$b_1 = 1 - \alpha \left[\xi \frac{\omega_n}{\omega'_n} \sin(\omega'_n T) + \cos(\omega'_n T) \right]$$

$$z_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

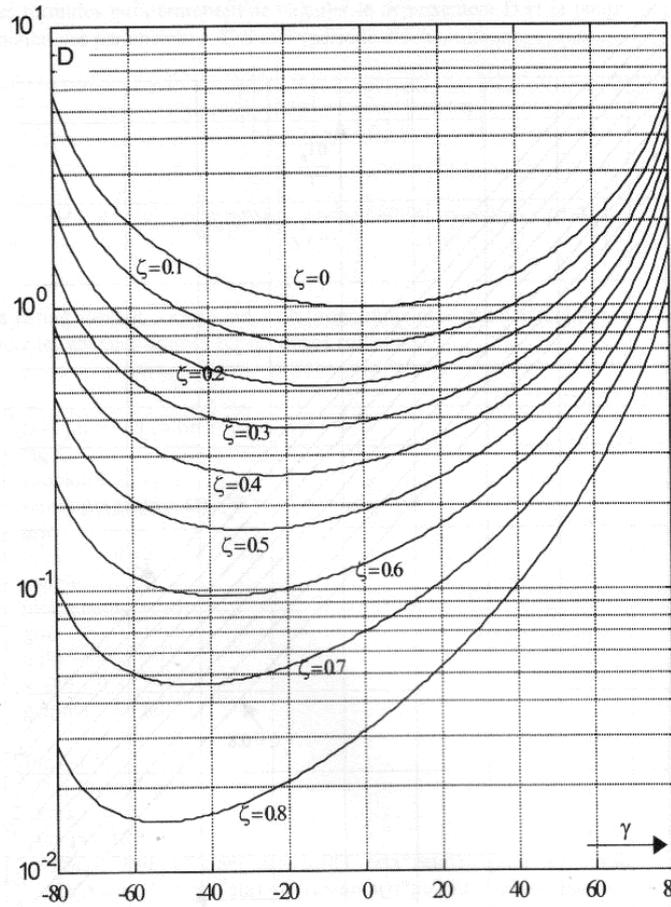
$$z_1 = e^{(-\xi\omega_n + j\omega'_n)T}$$

$$\bar{z}_1 = e^{(-\xi\omega_n - j\omega'_n)T}$$

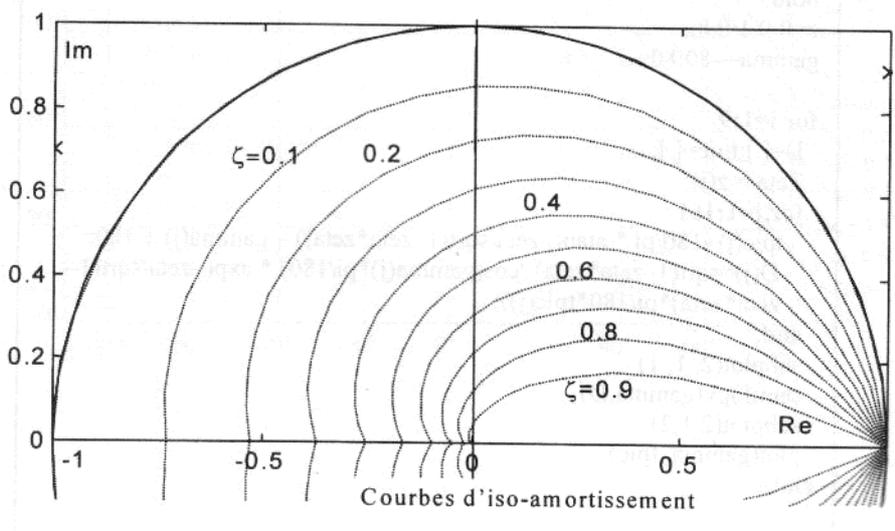
Courbes, abaques à utiliser.



(Abaque du 2^{ème} ordre numérique) : Paramètres



(Abaque du 2^{ème} ordre numérique) : Dépassement indiciel.



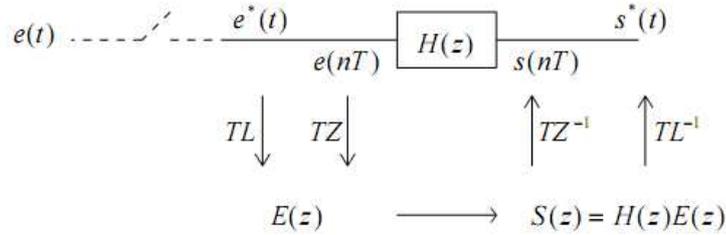
(Abaque du 2^{ème} ordre numérique) : Lieu des pôles à amortissement constant.

1.7 Structures générales de l'asservissement.

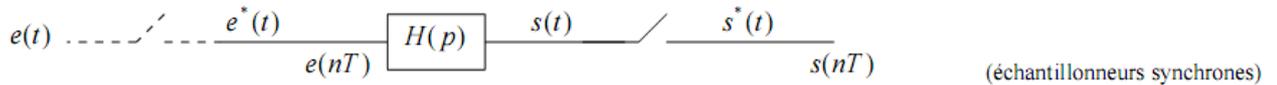
1.7.1 Systèmes et asservissements échantillonnés (fonctions de transfert).

Dès que l'on a au moins un échantillonneur dans un système, on utilise la transformée en z comme relation d'entrée-sortie fréquentielle.

- **Entrée numérique (échantillonnée)-sortie numérique (échantillonnée).**

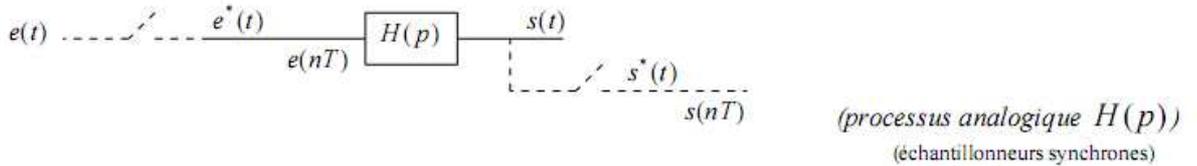


Ou,



$$S(p) = H(p)E^*(p) \xrightarrow{\text{TL}} S^*(p) = [H(p)E^*(p)]^* = H^*(p)E^*(p) \rightarrow S(z) = H(z)E(z)$$

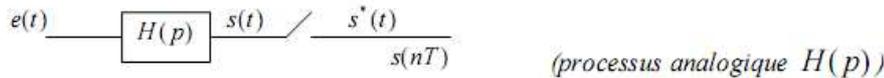
- **Entrée numérique (échantillonnée)-sortie analogique.**



$$s(t) = TL^{-1}[S(p)] = TL^{-1}[H(p)E^*(p)] \text{ d'où: } s^*(t) \xrightarrow{TL} S^*(p) = S(z) = [H(p)E^*(p)]^* = H^*(p)E^*(p) = H(z)E(z)$$

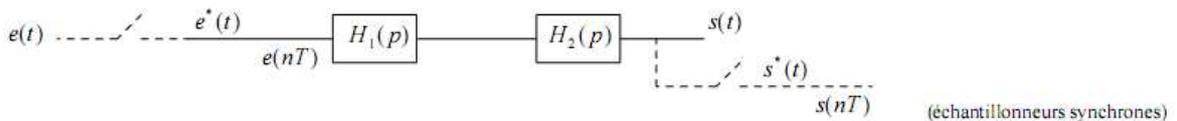
$$S(p) = H(p)E^*(p) \xrightarrow{\text{TL}} S^*(p) = H^*(p)E^*(p) \leftrightarrow S(z) = H(z)E(z) \text{ avec: } H(z) = Z[H(p)]$$

- **Entrée analogique -sortie numérique.**

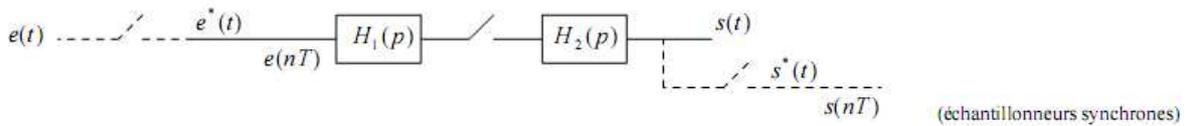


$$S(p) = H(p)E(p) \xrightarrow{\text{TL}} S^*(p) = \overline{HE}^*(p) \text{ (noté aussi } \overline{H(p)E(p)}^* \text{)} \leftrightarrow S(z) = \overline{EH}(z) \text{ avec: } \overline{EH}(z) = Z[\overline{EH}(p)]$$

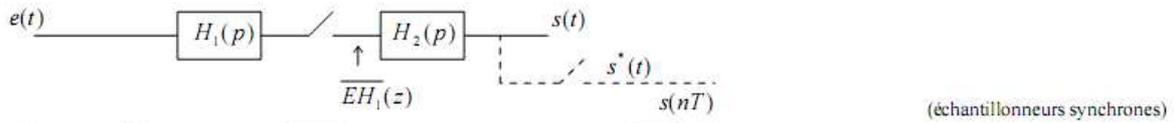
- **Schémas blocs en cascade.**



$$s^*(t) \xrightarrow{TL} S(z) = E(z)\overline{H_1H_2}(z) \text{ avec: } \overline{H_1H_2}(z) = Z[H_1(p)H_2(p)]$$



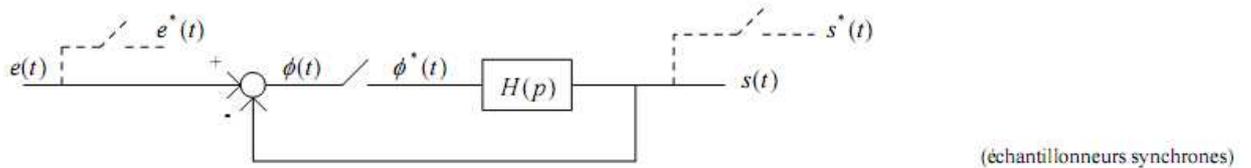
$$s^*(t) \xrightarrow{\mathcal{T}_L} S(z) = E(z)H_1(z)H_2(z) \quad \text{avec :} \quad H_1(z)H_2(z) = Z[H_1(p)] \cdot Z[H_2(p)]$$



$$s^*(t) \xrightarrow{\mathcal{T}_L} S(z) = \overline{EH_1}(z)H_2(z) \quad \text{avec :} \quad \overline{EH_1}(z) = Z[E(p)H_1(p)]$$

• **Asservissements échantillonnés.**

1.



$$S(p) = H(p)\Phi^*(p) \rightarrow S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p) \leftrightarrow S(z) = H(z)\Phi(z) \quad \text{avec :} \quad H(z) = Z[H(p)]$$

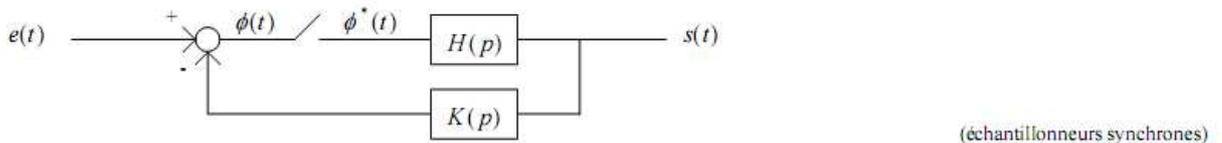
car : $[\Phi^*(p)]^* = \Phi^*(p)$: (rééchantillonnage synchrone d'un signal échantillonné : $\phi^*(t) = \phi^{**}(t)$)

$\Phi(p) = E(p) - S(p) \rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - S^*(p)$ (l'échantillonnage est un opérateur linéaire)

$$\Phi^*(p) = E^*(p) - H^*(p)\Phi^*(p) \rightarrow \Phi(z) = E(z) - H(z)\Phi(z) \rightarrow \Phi(z) = \frac{E(z)}{1 + H(z)}$$

$$S(z) = H(z)\Phi(z) = H(z) \frac{E(z)}{1 + H(z)} \rightarrow \text{FTBF : } \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)}}$$

2.



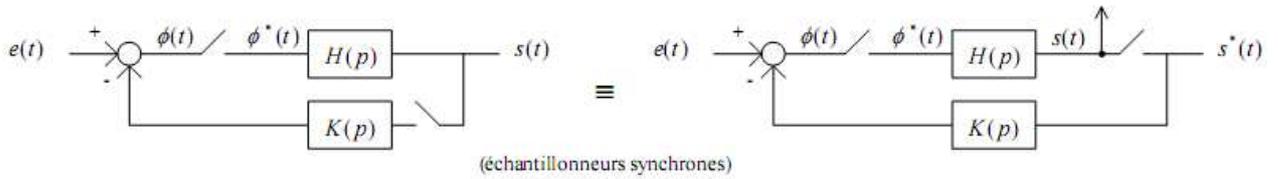
$$\Phi(p) = E(p) - K(p)S(p) \rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - \overline{K(p)S(p)^*} \quad \text{or} \quad S(p) = H(p)\Phi^*(p)$$

$$\rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - \overline{K(p)H(p)\Phi^*(p)^*} = E^*(p) - \overline{KH^*}(p)\Phi^*(p) \rightarrow \Phi^*(p) = \frac{E^*(p)}{1 + \overline{KH^*}(p)}$$

$$S(p) = H(p)\Phi^*(p) \rightarrow S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p) = H^*(p) \frac{E^*(p)}{1 + \overline{KH^*}(p)} \leftrightarrow S(z) = H(z) \frac{E(z)}{1 + \overline{KH}(z)}$$

$$\text{FTBF : } \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + \overline{KH}(z)}} \quad \text{avec :} \quad \overline{KH}(z) = Z[K(p)H(p)]$$

3.



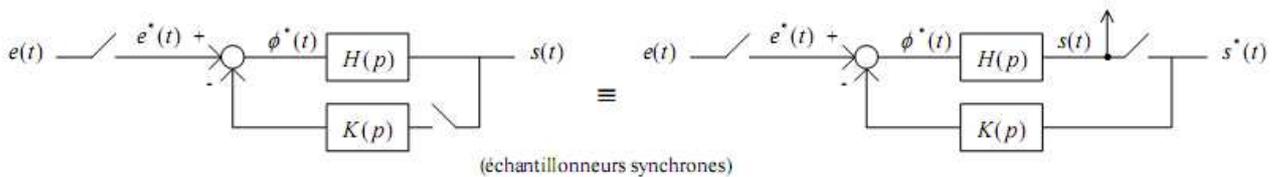
$$\Phi(p) = E(p) - K(p)S^*(p) \rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - K^*(p)S^*(p) \text{ or } S(p) = H(p)\Phi^*(p) \rightarrow S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p)$$

$$\rightarrow S^*(p) = H^*(p) [E^*(p) - K^*(p)S^*(p)] \rightarrow S(z) = H(z) [E(z) - K(z)S(z)]$$

$$FTBF: \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}}$$

avec : $H(z) = Z[H(p)]$ et $K(z) = Z[K(p)]$

4.



$$\Phi^*(p) = E^*(p) - K(z)S^*(p) \rightarrow \Phi(z) = E(z) - K(z)S(z)$$

$$S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p) \rightarrow S(z) = H(z)\Phi(z) = H(z)[E(z) - K(z)S(z)]$$

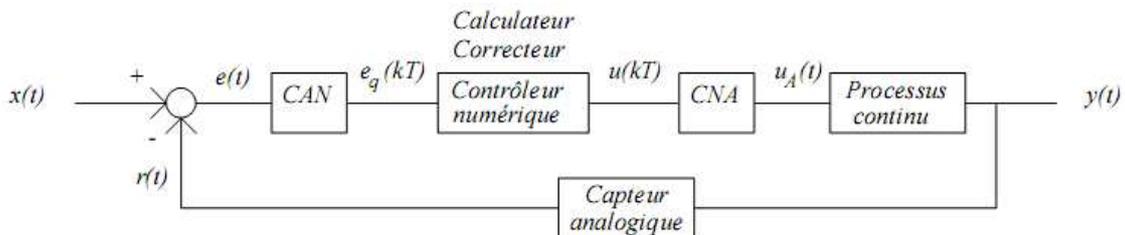
$$FTBF: \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}}$$

avec : $H(z) = Z[H(p)]$ et $K(z) = Z[K(p)]$

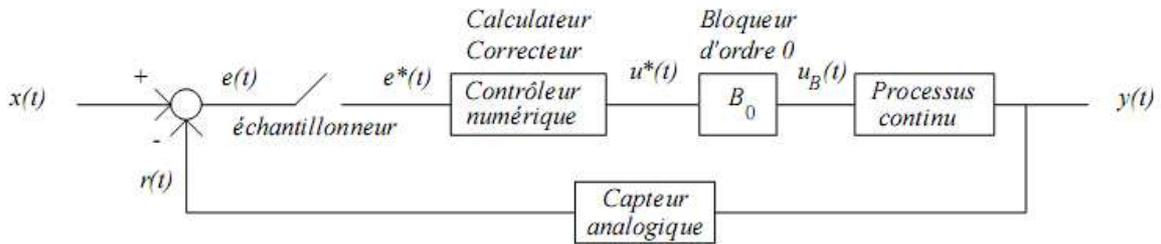
La période d'échantillonnage est calculée à partir de l'inertie apparente du système bouclé.

1.7.2 Boucles de commande numériques.

1. Structure générale d'un asservissement numérique d'un processus continu.

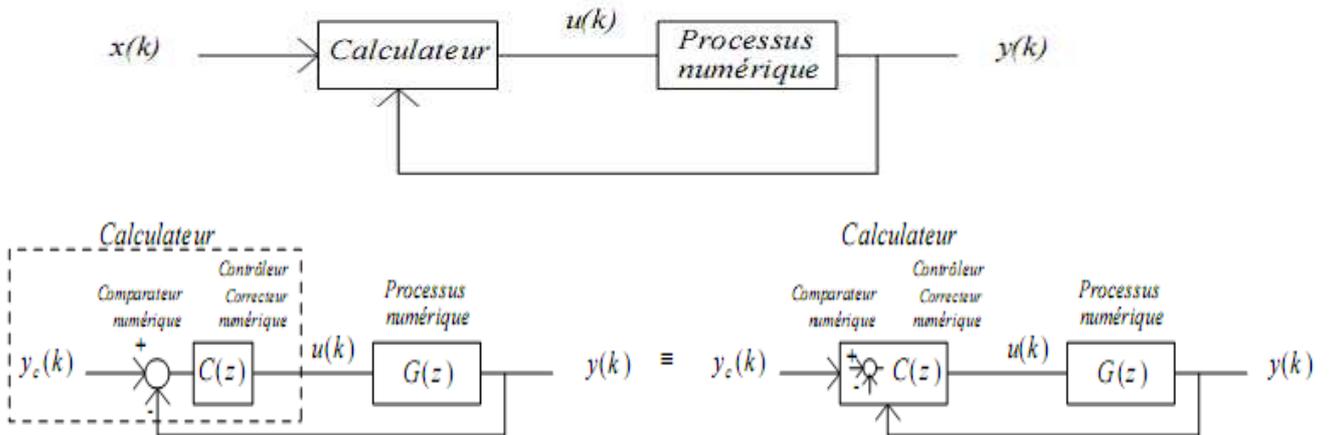


2. Structure générale d'un asservissement échantillonné d'un processus continu.



La structure est identique à celle de l'asservissement numérique d'un processus continu. Le bruit de quantification de CAN est négligé pour ne retenir que l'échantillonnage (CAN=échantillonnage +quantification). Le CNA est constitué d'un bloqueur d'ordre zéro.

3. Structure générale d'un asservissement numérique d'un processus numérique.



Le calculateur assure, en plus du contrôle numérique, la fonction de comparateur (numérique).

Chapitre 2 : Performances des systèmes échantillonnés asservis.

2.1 Pôles – Zéros – Stabilité – Causalité :

Pôles : les pôles z_i d'un système de fonction de transfert $G(z)$ caractérise la dynamique de ce système (\equiv le régime transitoire). Les pôles sont les racines de l'équation caractéristique qui définit le régime libre (\equiv lié aux conditions initiales) du système.

Causalité :

Soit le système de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^m a_k z^{-k}}$$

La causalité du système impose $n \geq m$ sans quoi la récurrence temporelle est exprimée en fonction du futur et non passé.

Zéros d'un système numérique :

Comme en analogie, ils déterminent si le système est à phase minimale (un système est à phase minimale si les zéros de sa fonction de transfert sont stables). Un zéro instable (\equiv de module > 1) suffit à rendre un système à non minimum de phase (\equiv système non rapide par rapport à un système à minimum de phase).

Les zéros d'un système caractérisent la rapidité. Un système possédant des zéros est un système dont le second membre contient (mémoire) des termes de l'entrée d'excitation : $e(k), e(k-1), e(k-2), \dots$

L'introduction d'un zéro stable a donc pour effet d'accélérer le système.

Le réglage d'un zéro comme zéro instable, provoque quand a lui un retard du système.

Un zéro $z_0 = 0$ est une avance pure d'un pas d'échantillonnage. $zG(z)$ est plus rapide que $(z - 0.5)G(z)$, lui-même plus rapide que $G(z)$

Stabilité :

Si on envoie une impulsion de Dirac à un système de fonction de transfert $G(z)$, sa sortie est :

$$S(z) = G(z).$$

Développons $\frac{G(z)}{z}$ en éléments simples autour de ces pôles z_i : $G(z) = \frac{zA_1}{z-z_1} + \frac{zA_2}{z-z_2} + \dots$

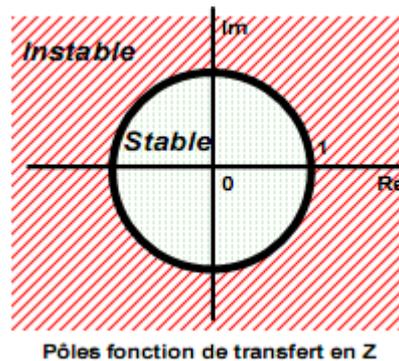
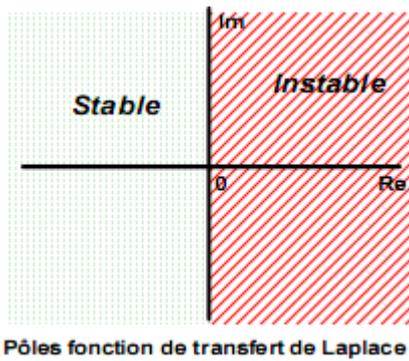
D'où : $s(kT) = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k + \dots$ car : $TZ\left[z_i^k\right] = \frac{z}{z-z_i}$

La réponse impulsionnelle $s(kT)$ ne s'amortit et tend vers zéro que si : $|z_i| < 1$.

Théorème : un système numérique est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont situés à l'intérieur du cercle de rayon 1. Il est d'autant plus stable (amorti) que les pôles sont plus à l'intérieur du cercle.

Ceci est prévisible du fait de la relation de passage continu-discret : $z = e^{pT}$:

(Stabilité analogique) $\text{Re}(p_i) < 0 \Leftrightarrow |z_i| < 1$ (Stabilité numérique).



Relation entre les pôles d'un système analogique $A(z)$ et ceux du système échantillonné-bloqué $G(z)$:

$$A(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots} = \frac{A_1}{1 + \tau_1 p} + \frac{A_2}{1 + \tau_2 p} + \dots$$

$$Z\left[\frac{A(p)}{p}\right] = \sum_i Z\left[\frac{A_i}{p(1 + \tau_i p)}\right] = \sum_i \frac{A_i z(1 - \alpha_i)}{(z-1)(z - \alpha_i)} \quad \text{avec: } \alpha_i = e^{-\frac{T}{\tau_i}} = e^{p_i T}$$

donc : $G(z) = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{A(p)}{p}\right] = \sum_i \frac{A_i(1 - \alpha_i)}{z - \alpha_i}$. Les pôles de $G(z)$ sont donc : $z_i = \alpha_i = e^{p_i T}$.

Lorsque le système est d'ordre supérieur à 2, il est appréciable, comme en analogique, de disposer de critères appropriés qui ne nécessitent pas de calculer les pôles.

Critère de Nyquist.

Critère algébrique permettant de déduire la stabilité de la boucle fermée à partir du tracé du lieu de la boucle ouverte.

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $F(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)}$ sont les zéros de

$1+T(z) = 0$. Quand z parcourt entièrement le cercle unité dans le sens trigonométrique $T(z)$ décrit une courbe, très analogue au lieu de Nyquist, qui entoure ou non l'origine.

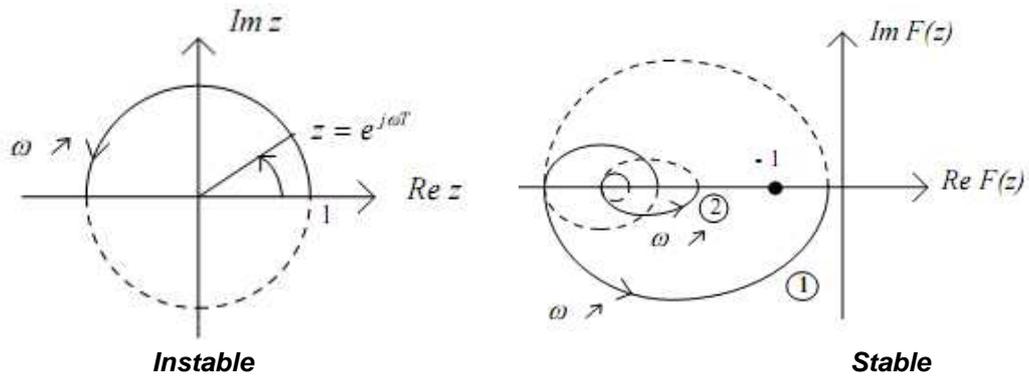
Donc $F(z)$ entoure ou non le point critique -1.

D'après le théorème de Cauchy : lorsque $F(z)$ est stable, $T(z)$ est stable, si

lorsque z décrit le cercle unité dans le sens trigonométrique, le lieu de $F(z)$ n'entoure pas

le point -1. $z = e^{pT}$ étant périodique de période $2\pi/T$, le lieu de Nyquist est décrit pour ω variant de 0 à $2\pi/T$.

Exemple :



Lieu des racines :

Ce lieu des racines ou lieu d'Evans est le lieu des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée lorsque le gain K varie de 0 à l'infini. C'est un moyen de choisir un gain K pour obtenir, en boucle fermée, les performances pré-spécifiées.

Pour l'étude de la stabilité de la boucle fermée, on trace dans le plan complexe, le lieu des racines du dénominateur, noté $D(z) = 1 + T(z) = 0$ dont on recherchera les racines ; sa construction fait appel à 8 règles.

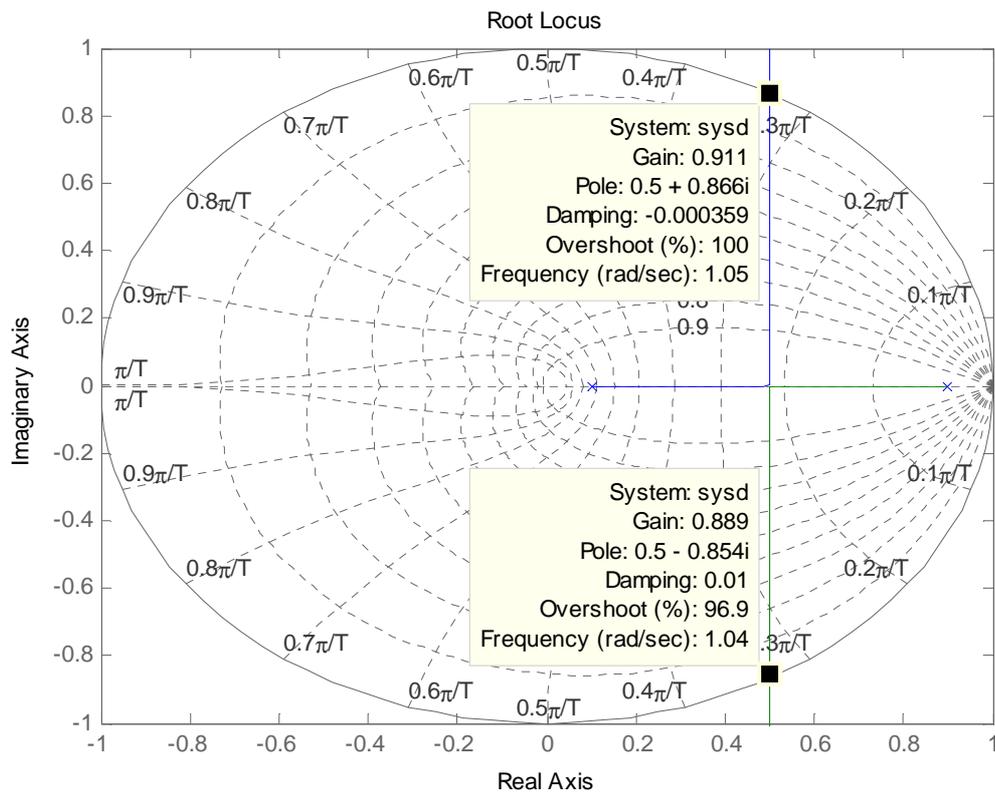
Le système bouclé est stable, si le lieu $D(z)$ reste situé à l'intérieur du cercle unité.

Exemple 1 :

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.9)}$$

Exemple de code Matlab utilisé

```
>> sysd=zpk([],0.1 0.9],1,1)% période d'échantillonnage = 1s  
>> rlocus(sysd);  
>> zgrid
```



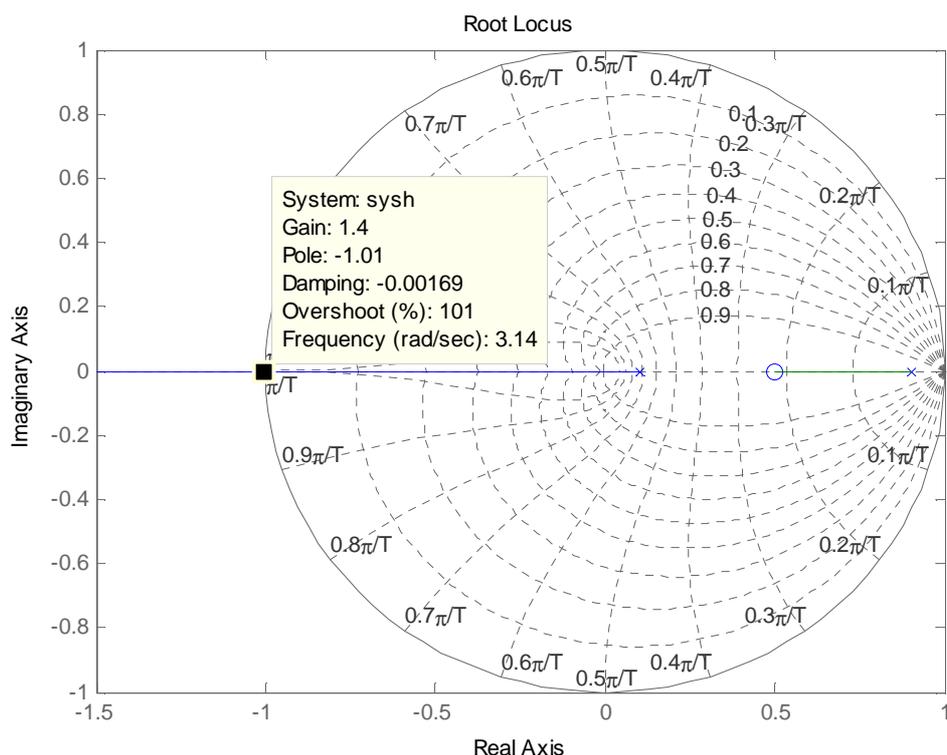
Exemple de code Matlab utilisé

```
>> sysd=zpk([],0.1 0.9,1,1)% période d'échantillonnage = 1s
>> rlocus(sysd);
>> zgrid
```

- lorsque K est très faible les pôles en BF sont proches de ceux en BO,
- lorsque K augmente, le système accélère, les pôles se rapproche et deviennent complexes conjugués,
- lorsque K dépasse la valeur de 0.9, les pôles ont un module > 1 , le système est instable.

Exemple 2 :

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{(z - 1)(z - 0.9)},$$



- lorsque K est très faible les pôles en BF sont proches de ceux en BO,
- lorsque K augmente, le pôle en 0.9 tend vers le zéro en 0.5, l'autre pôle tend vers $-\infty$,
- la limite de stabilité est obtenue pour $K = 1.4$.

Critère de Routh-Hurwitz :

Le critère est algébrique, la méthode consiste à transposer le critère analogique dans le domaine numérique en utilisant une transformée homographique qui fait correspondre à l'intérieur du cercle unité du plan z , le demi plan gauche du plan p .

Transformée en w :

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{1+w}{1-w}$$

Après transformation en w , on peut alors appliquer le critère de Routh-Hurwitz au polynôme : $1+T(z) = 0$

Critère de Jury :

La stabilité est conditionnée par la place des racines de l'équation caractéristique :

$$1+T(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 ; a_n > 0 ; (n \text{ entier positif})$$

par rapport au cercle unité.

$F'(z)$ stable ssi* : 1. $a_n > |a_0|$
 et 2. $Q(z)|_{z=1} > 0$
 et 3. $Q(z)|_{z=-1} > 0$ si n pair
 $Q(z)|_{z=-1} < 0$ si n impair
 et si $n \geq 3$: 4. $\equiv \{ (n-2) \text{ sous-conditions } (n \geq 3) : \}$ (si $n < 3$, la condition 4. est inexistante)

et si $n \geq 3$: 4. $\equiv \{ (n-2) \text{ sous-conditions } (n \geq 3) : \}$ (si $n < 3$, la condition 4. est inexistante)

$$4. \left\{ \begin{array}{l} |b_{n-1}| > |b_0| \text{ avec : } b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = n-1 \text{ et } k=0 \\ \text{et} \\ |c_{n-2}| > |c_0| \text{ avec : } c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = n-2 \text{ et } k=0 \\ \text{et ... jusqu'à :} \\ |q_2| > |q_0| \text{ avec : } q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 2 \text{ et } k=0 \end{array} \right.$$

Le système est stable si et seulement si les $(n+1)$ conditions suivantes sont satisfaites.

Applications aux systèmes :

Système du 1^{er} ordre :

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 &> 0 \\ a_1 - a_0 &> 0 \end{aligned}$$

Système du 2^{ème} ordre :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &> 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 &> 0 \\ |a_0| &< a_2 \end{aligned}$$

Système du 3^{ème} ordre :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &> 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 &> 0 \\ |a_0| &< a_3 \\ a_0^2 + a_3^2 &> a_0 a_2 - a_1 a_3 \end{aligned}$$

Comme pour les systèmes continus, les marges de phase, de gain et de module restent les outils d'étude de la stabilité relative dans le domaine fréquentiel ; ainsi que les concepts d'amortissement et de dépassement dans le domaine temporel.

2.2 Précision statique des asservissements échantillonnés.

On définit, pour les systèmes échantillonnés, les mêmes performances que pour les systèmes à temps continu. Il en est ainsi de la précision des systèmes qui est ici, toujours définie par les notions d'erreurs de position, de vitesse et d'accélération.

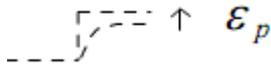
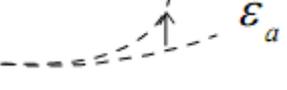
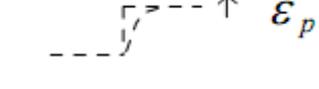
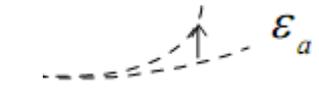
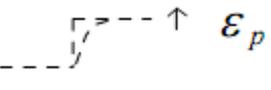
On obtient l'erreur $\varepsilon(k)$ dans le domaine temporel uniquement en régime permanent stabilisé,

par l'intermédiaire du théorème de la valeur finale : $\varepsilon(k)_{k \rightarrow \infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\varepsilon(z)$

Si $T(z)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte d'un retour unitaire ; alors :

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+T(z)} = \frac{E(z)}{1+K \frac{1}{(z-1)^m} \cdot z^{-k} \cdot \frac{N(z)}{D(z)}} \cdot \text{(Forme standard),}$$

m est la classe du système.

Classe	<u>Erreur statique de Position</u> (échelon de position d'amplitude E_0) 	<u>Erreur statique de Vitesse</u> (échelon de vitesse akT) 	<u>Erreur statique d'accélération</u> (échelon d'accélération) $(\frac{1}{2}bk^2T^2)$ 
$m = 0$	 $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+KT(1)}$	 ∞	 ∞
$m = 1$	 0	 $\varepsilon_v = \frac{aT}{KT(1)}$	 ∞
$m = 2$	 0	 0	 $\varepsilon_a = \frac{bT^2}{KT(1)}$

Une bonne précision est obtenue au moyen d'intégrateurs numériques qu'il faut introduire dans la boucle ouverte au moyen du correcteur.

2.3 Rapidité :

La rapidité est liée au temps de réponse donc à la bande passante. Celle-ci est elle-même liée à la constante de temps dominante ou à la pulsation propre ω_n .

Étapes d'une commande numérique par ordinateur d'un processus continu échantillonné – bloqué :

- **Choix de la période d'échantillonnage T et obtention par calcul ou identification, de l'équation de récurrence ou de la fonction de transfert du processus numérique à réguler,**
- **Choix du modèle numérique à atteindre en boucle fermée après correction ; choix guidé par l'analyse et l'expression du cahier de charge,**
- **Conception du correcteur numérique nécessaire (calcul des paramètres du correcteur),**
- **Le correcteur, calculé en général dans le domaine fréquentiel (transformée en z) conduit, par retour au domaine temporel, à l'algorithme de commande du processus. Il élabore en temps réel (causalité du système à contrôler) la commande $u(k)$ à envoyer à chaque pas T au système numérique placé sous son contrôle.**

Une commande numérique est du point de vue formel, identique à une commande échantillonnée.

La synthèse consiste à se conformer à ce modèle imposé, en déterminant une récurrence u_k réalisable :

- **Causale (la commande à l'ordre k , ne doit dépendre que des valeurs précédentes de la commande u , de la consigne e et de la mesure y),**
- **Stable (pôles à l'intérieur du domaine stable), ce qui garantit une commande douce et une sortie continue sans oscillations cachées.**

Le comportement d'un système asservi (numérique) échantillonné est le même que celui d'un système asservi continu ; il doit être robuste vis-à-vis de la stabilité, de la précision et de la rapidité. Par contre la synthèse ou le réglage diffère, les causes :

- **La constitution du régulateur (programmable),**
- **et de la période d'échantillonnage.**

Deux types de réglage, soit la synthèse en utilisant les méthodes du continu, soit une synthèse dite numérique.

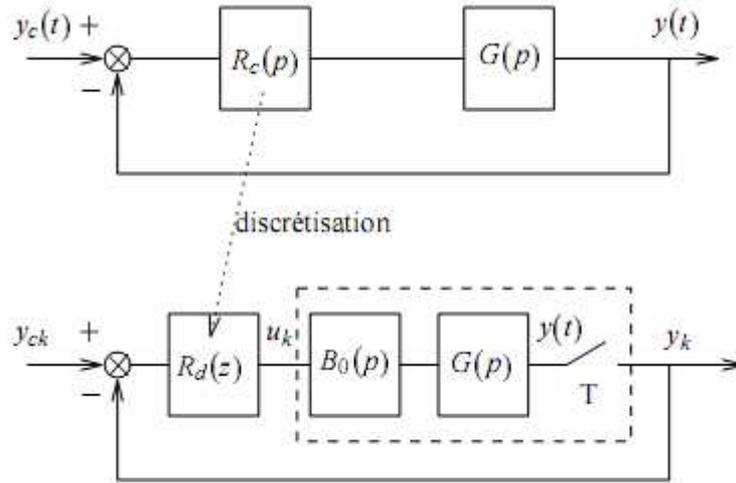
3.1 Synthèse de correcteurs numériques par extension de correcteurs analogiques.

Cette synthèse est une approche couramment utilisée dans le domaine industriel.

Cette approche suppose que l'on ait réalisé la synthèse d'un correcteur analogique par les méthodes d'étude des systèmes continus. On recherche un algorithme numérique qui se rapproche le plus possible du correcteur analogique, en faisant des approximations de la variable de Laplace p , ou sur les pôles et les zéros de la fonction de transfert du correcteur analogique.

Approximation de la variable p .

Le principe de l'approche consiste à déduire un correcteur $R_d(z)$ du correcteur $R_c(z)$ en choisissant une approximation de la variable p , selon la figure :



Discrétisation d'un correcteur analogique.

Discrétisation avant : $p = \frac{z-1}{T}$

Elle résulte de l'approximation de la dérivée d'une fonction entre deux instants d'échantillonnage par la méthode d'Euler.

Discrétisation arrière ; $p = \frac{z-1}{zT}$

Approximation de Tustin : $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

3.2 Synthèse utilisant les méthodes continues.

Le principe de ces méthodes repose sur le passage du système échantillonné à un système continu qui lui est approximativement équivalent à l'aide de transformations. Une fois, la synthèse utilisant les méthodes classiques du continu faites, on revient au régulateur discret.

Exemples de transformations :

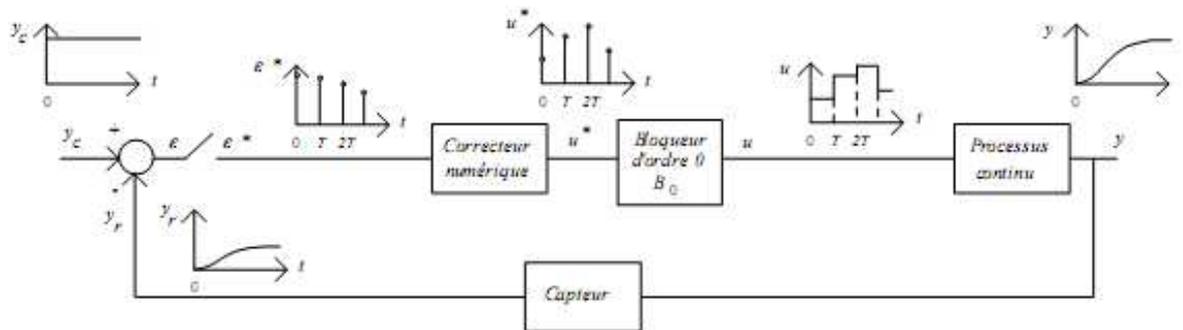
<u>Méthode</u>	<u>Principe</u>	$G_n(p)$	$C(z)$
Retard de $\frac{T}{2}$	$B_0(p) \approx e^{-p\frac{T}{2}}$	$e^{-p\frac{T}{2}} \cdot G(p)$	$C\left(\frac{z-1}{T}\right)$
Approximation linéaire	$z \approx 1 - pT$ $p \approx \frac{z-1}{T}$	$G(1 + pT)$	$C\left(\frac{z-1}{T}\right)$
Transformation homographique	$z \approx \frac{1 + pT/2}{1 - pT/2}$ $p = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$	$G\left(\frac{1 + pT/2}{1 - pT/2}\right)$	$C\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)$

Transformée en w	$z \approx \frac{1+w}{1-w},$ $w = \frac{z-1}{z+1},$ $p = j\omega \Rightarrow$ $w = jtg(\omega T/2) = jv$	$G\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$	$C\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$
-------------------------	--	---------------------------------	---------------------------------

3.3 Synthèse numérique.

3.3.1 Correcteurs standards (pour les systèmes «compensables»):

Structure générale de la commande :



(T : période d'échantillonnage).

Correcteur Proportionnel et Intégral (PI) :

- **But :** accroître la précision par un retard et augmentation du gain statique.
- **Relation de base et fonction de transfert :**

$$u_k = K_p \varepsilon_k + K_i \sum_{k=0}^k \varepsilon_k \Rightarrow D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1}$$

Qui se met aussi sous la forme :

$$D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z-1}$$

Avec :

$$\begin{cases} b_0 = -K_p \\ b_1 = K_p + K_i \end{cases}$$

- **Algorithme de commande :**

$$u_k = u_{k-1} + b_1 \varepsilon_k + b_0 \varepsilon_{k-1} \quad , \text{CI nulles.}$$

Correcteur Proportionnel et Dérivée PD (\equiv avance de phase) :

- **But :** accroître la stabilité et la rapidité par une avance de phase.
- **Relation de base et fonction de transfert :**

$$u_k = K_p \varepsilon_k + K_d (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \Rightarrow D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p + K_d \frac{z-1}{z}$$

Qui se met aussi sous la forme :

$$D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z}$$

Avec :

$$\begin{cases} b_0 = -K_p \\ b_1 = K_p + K_d \end{cases}$$

- **Algorithme de commande :**

$$u_k = (K_p + K_d) \varepsilon_k + K_d \varepsilon_{k-1}, \text{ CI nulles.}$$

PID numérique :

But :

- améliorer les performances du système bouclé (précision, stabilité, rapidité et sensibilité aux incertitudes du modèle),
- allonger la période d'échantillonnage.

Fonction de transfert discrète :

$$D(z) = K \left(1 + \frac{T}{T_I} \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right), \text{ obtenue par transposition numérique des}$$

opérations d'intégration et de dérivation analogique.

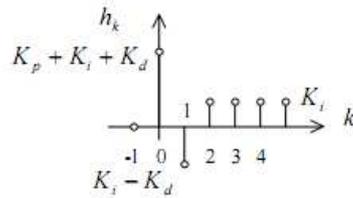
Et peut aussi être écrit sous la forme :

$$D(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z(z-1)} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} b_0 = K_d \\ b_1 = -(K_p + 2K_d) \\ b_2 = K_p + K_i + K_d \end{cases}$$

(2 pôles : $z = 0$ et $z = 1$)

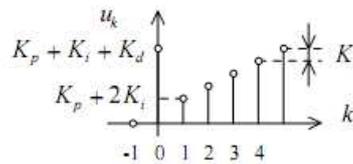
• Réponse Impulsionnelle discrète :

$$h_k = TZ^{-1}[D(z)] = TZ^{-1}\left[K_p + K_i \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z}\right] \rightarrow h_k = (K_p + K_d)\delta_k - K_d\delta_{k-1} + K_i\Gamma_k$$



• Réponse indicielle discrète :

$$u_k = TZ^{-1}\left[D(z) \frac{z}{z-1}\right] \rightarrow \begin{cases} u_0 = K_p + K_i + K_d \\ u_k = K_p + K_i(k+1) \text{ pour } k \geq 1 \end{cases}$$



δ_k, Γ_k sont respectivement : impulsion et échelon de position discrets

- **Algorithme de commande :**

$$u_k = K_i \sum_{k=0}^k \varepsilon_k + (K_p + K_d + K_i)\varepsilon_k - K_d\varepsilon_{k-1}$$

Posons

$$|x_{k-1} = K_i \sum_{k=0}^k \varepsilon_k, \rightarrow x_k = x_{k-1} - K_d\varepsilon_{k-1}$$

$$K_{PID} = K_p + K_d + K_i$$

$$\Rightarrow u_k = x_{k-1} + K_{PID}\varepsilon_k - K_d\varepsilon_{k-1},$$

3.3.2 Correcteurs « personnalisés » (en fonction du processus à contrôler):

Méthodes pour la plus part fondée sur le fait que les principales caractéristiques de la réponse indicielle sont fixées par un pôle dominant, constitué d'une paire de pôles complexes et d'un zéro réel.

Le système corrigé sera caractérisé par :

- son régime transitoire ; amortissement ξ , pulsation propre ω_n , dépassement D , temps de réponse t_r ou temps de pic T_{pic} .
- son régime permanent : erreurs statiques nulles.

On devra veiller à obtenir un correcteur réalisable ($n \geq m$) donc causal pour autoriser une régulation en temps réel, veiller à ce que le temps de calcul de l'algorithme de commande soit inférieure à la période d'échantillonnage et enfin à ne pas compenser un zéro instable.

1. Méthode du second ordre équivalent (pôles dominants) :

Les considérations précédentes nous ramènent à une fonction de transfert en boucle fermée de la forme :

$$F(z) = K \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} \text{ avec : } p_1 = \rho_1 e^{j\theta}$$

K est calculé de façon à annuler l'erreur statique de position, soit $F(z=1) = 1$; d'où :

$$K = \frac{(1 - p_1)(1 - \bar{p}_1)}{1 - z_1}$$

Les pôles complexes p_1 et \bar{p}_1 sont déterminés à partir des abaques du second ordre numérique, lieu des pôles à amortissement constant, réponse indicielle.

L'expression du régulateur $C(z)$ se déduit de la formule de Black :

$$C(z) = \frac{F(z)}{G(z)[1 - F(z)]}$$

$G(z)$, étant la fonction de transfert en z du processus à contrôler.

2. Méthode de Zdan :

L'objectif est d'obtenir un système en boucle fermée dont le comportement soit voisin de celui d'un système du second ordre, caractérisé par une paire de pôles dominants.

Le système est purement numérique,



Les spécifications sur le modèle $H(z)$ pour le système corrigé concernant :

- Le régime transitoire défini par 2 paramètres : en général l'amortissement ξ et la pulsation ω_n du système non amorti (ou la pulsation de résonance ω_R).
- Le régime permanent : caractérisé par les erreurs statiques.

Le principe de la méthode de Zdan est d'aboutir à l'expression de $C(z)G(z)$ la plus simple possible. $C(z)$ Comportera :

1. Des pôles et des zéros compensant les zéros et les pôles de $G(z)$.
2. Autant de pôles à $z=1$ qu'il est nécessaire, compte tenu de ceux de $G(z)$ pour que l'erreur statique soit nulle, selon l'ordre de précision souhaité.
3. Un gain ajustable K_D .
4. Autant de paramètres (A_i, B_i) qu'il y a de spécifications (amortissement, rapidité...) à satisfaire. Ces paramètres interviennent dans des expressions de la forme :

$$\frac{1 + A_1 z^{-1}}{1 + B_1 z^{-1}}, \quad \frac{1 + A_1 z^{-1}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}, \quad \frac{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}}{1 + B_1 z^{-1}}, \quad \frac{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}, \quad \text{etc ...}$$

$C(z)$ s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{1}{(z-1)^m} \cdot K_D \cdot \left(\frac{1 + A_1 z^{-1} + \dots}{1 + B_1 z^{-1} + \dots} \right)$$

L'équation caractéristique est (équation décrivant le système bouclé) :

$$1 + C(z)G(z) = 0,$$

On identifiera les coefficients à ceux de l'équation caractéristique désirée (pour le système modèle) et, de façon générale à ceux découlant de l'expression :

$(1 - z_1 z^{-1})(1 - \bar{z}_1 z^{-1})(1 - z_3 z^{-1}) \dots (1 - z_n z^{-1})$ où z_1 et \bar{z}_1 sont les pôles dominants (correspondant à un 2^{ème} ordre) et z_3, z_4, \dots, z_n des pôles que l'on doit rendre négligeables.

$$z^2 - 2.e^{-\omega_n T \xi} . \cos(\omega_n T \xi) . z + e^{-2\omega_n T \xi} = 0$$

Exemple :

On souhaite corriger le système asservi d'entrée $E(z)$, de sortie $S(z)$ et de transmittance échantillonnée en boucle ouverte :

$$T(z) = \frac{1 + 0.718z^{-1}}{1 - 0.368z^{-1}}$$

La période d'échantillonnage est $T = 0.1s$. Les performances souhaitées correspondent aux caractéristiques d'un système du second ordre :

$$\omega_n = 10 \text{rd} / s, \xi = 0.5, \text{ erreur de position nulle.}$$

On choisit $C(z) = \frac{1}{T(z)}$, ainsi on supprime les pôles et les zéros de la transmittance de

départ, mais il faut de plus que le système possède une erreur de position nulle, il faut donc ajouter un intégrateur :

$$C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1}{T(z)}$$

Maintenant il faut introduire des paramètres (que l'on règlera) qui permettent de satisfaire le cahier de charges. On choisit donc :

$$C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1 - 0.368z^{-1}}{1 + 0.718z^{-1}} \frac{K_d}{A + z}$$

La nouvelle transmittance en boucle ouverte est :

$$TC(z) = \frac{K_d z}{(z - 1)(z + A)}$$

On identifie ensuite $1 + T(z)C(z) = 0$ à l'équation du second ordre :

$$z^2 + z(K_d + A - 1) - A \equiv z^2 - 2.e^{-\omega_n T \xi} . \cos(\omega_n T \xi) . z + e^{-2\omega_n T \xi} = 0$$

On obtient après identification :

$$K_d + A - 1 = -2e^{-\omega T \xi} \cos(\omega_n T \xi) = -0.786$$

$$-A = e^{-2\omega_n T \xi} = 0.368$$

Qui donne :

$$A = -0.368$$

$$K_d = 0.582$$

Ainsi, en boucle fermée, on obtient la fonction de transfert corrigée :

$$T(z)C(z) = \frac{0.582}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

Et le correcteur :

$$C(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1-0.368z^{-1}}{1+0.718z^{-1}-0.368+z} \frac{0.582}{z^{-1}} = 0.582 \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{1}{1+0.718z^{-1}}$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.582z^{-2}}{1-0.786z^{-1}+0.368z^{-2}}$$

La réponse indicielle s'écrit :

$$s(k) = 0.786s(k-1) - 0.368s(k-2) + e(k-2)$$

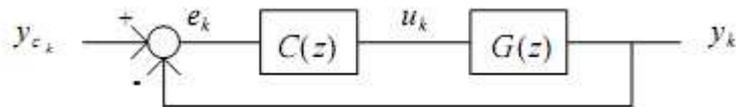
L'allure est bien d'un second ordre avec une erreur de position nulle et un dépassement $D \approx 18\%$.

L'inconvénient de la synthèse par la méthode de Zdan est la maîtrise «relative» du transitoire (en particulier le dépassement) par absence de contrôle sur le numérateur du modèle de référence.

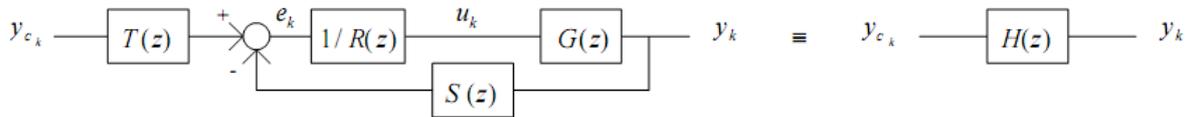
3.3.3 Synthèse des correcteurs numériques. Réponse pile.

1. Les structures des correcteurs numériques.

La structure classique de régulation suivante :



n'est qu'une structure particulière du schéma :



Le correcteur $C(z)$ est alors distribué sur les fonctions de transfert $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ qui sont des polynômes en z à déterminer.

Le correcteur classique $C(z) = \frac{U(z)}{Y_c(z) - Y(z)} = \frac{S(z)}{R(z)}$ est obtenu pour $S(z) = T(z)$.

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^k}{\sum_{k=0}^n a_k z^k}, \text{ avec } (n-m) \text{ quelconque (mais } (n-m) \geq 0 \text{) et certains zéros}$$

de $G(z)$ instables.

Cette structure permet de réguler les processus $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ sans conditions sur les polynômes $A(z)$ et $B(z)$ et notamment des processus avec zéros instables.

Systèmes non compensables, structure RST :

L'intérêt de cette structure particulière est de séparer (ou découpler) les comportements dynamiques vis-à-vis de la consigne et des perturbations éventuelles.

Par ailleurs cette structure présente l'avantage de simplifier l'implantation du régulateur PID, mais aussi d'adoucir la réponse du système régulé. Le calcul de ce correcteur peut se faire automatiquement par un logiciel ; en voici une méthode.

La loi de commande est issue de la structure de l'asservissement :

$$R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z).$$

Le modèle en boucle fermée qu'on se propose d'atteindre est :

$$H(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}.$$

On a :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{T(z)B(z)}{A(z)B(z) + B(z)S(z)}.$$

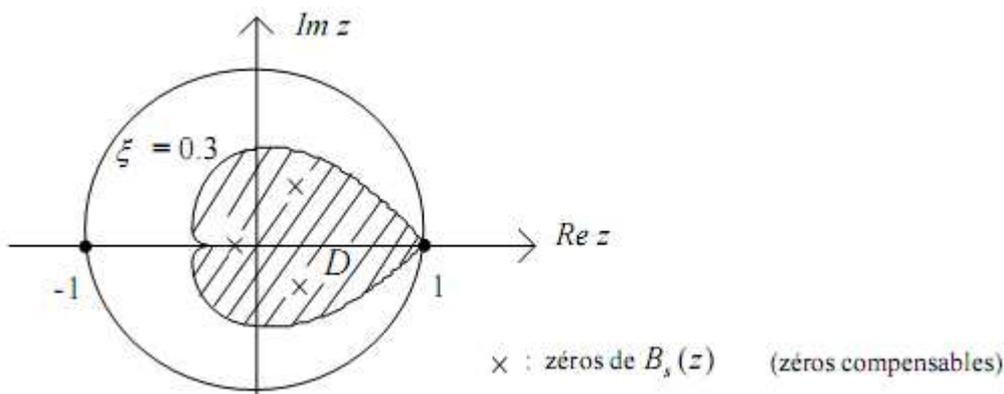
On cherche à calculer les polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ pour que $H(z)$ soit conforme au modèle imposé (c'est donc une généralisation de synthèse de la structure classique) :

$$H(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}.$$

$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$; Le numérateur $B(z)$ donne les zéros du processus. Posons :

$$\begin{cases} B(z) = B_i(z)B_s(z) \\ B_s(z) = (z - z_0)(z - z_1)\dots = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots \\ B_i(z) = K(z - z'_0)(z - z'_1)\dots \end{cases}$$

Les zéros z_0, z_1, \dots de $B_s(z)$ sont intérieurs à un domaine D (qui contient les pôles stables) du plan complexe dédié à z . $B_i(z)$ regroupe les zéros instables de $B(z)$: z'_0, z'_1, \dots



Si on rapproche $H(z)$ de $G(z)$, il paraît assez naturel de penser que $H(z)$ ne pourra jamais compenser les retards intrinsèques à $G(z)$ et qui sont manifestés par la différence des degrés des polynômes $B(z)$ et $A(z)$. Le modèle $H(z)$ doit tenir compte de ce fait et on doit avoir :

$$\text{deg ré}(A_m(z)) - \text{deg ré}(B_m(z)) \geq \text{deg ré}(A(z)) - \text{deg ré}(B(z))$$

Comme $B_i(z)$ constitue une partie non compensée de $B(z)$, on doit le retrouver dans $B_m(z)$:

$$B_m(z) = B_i(z)B'_m(z).$$

Le polynôme $R(z)$ intervient au dénominateur dans la boucle de régulation. Son degré doit être suffisant pour assurer la causalité du correcteur. Les polynômes $S(z)$ et $T(z)$ sont de degré au plus égal à celui de $R(z)$.

- $R(z)$ compense les zéros compensables du processus, contenus dans $B_s(z)$. Il assure en outre la présence des intégrations nécessaires pour assurer la précision. On a donc :

$$R(z) = (z-1)^i B_s(z)R'(z).$$

$R'(z)$ est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

- Le polynôme $T(z)$ assure le couplage du système à son entrée de commande, il fournit donc les zéros nécessaires pour obtenir le numérateur du modèle $B_m(z)$ dont une partie est déjà fournie par la partie non compensable du processus. On choisit donc :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z)$$

Le degré de $A_0(z)$ n'est pas arbitraire. Il permet la synthèse de $R(z)$ et $T(z)$. On doit avoir :

$$\text{degré}(A_0(z)) \geq 2 \text{ degré}(A(z)) - \text{degré}(A_m(z)) - \text{degré}(B_s(z)) + i - 1.$$

- Le polynôme $S(z)$, tout comme $R(z)$, est solution d'une équation polynomiale dans laquelle on a remplacé les polynômes :

$$\begin{aligned} B(z) &\text{ par } B_i(z)B_s(z) \\ B_m(z) &\text{ par } B_i(z)B'_m(z) \\ R(z) &\text{ par } (z-1)^i B_s(z)R'(z) \\ T(z) &\text{ par } B'_m(z)A_0(z) \end{aligned}$$

Il vient :

$$\frac{B'_m(z)A_0(z)B_i(z)B_s(z)}{(z-1)^i A(z)B_s(z)R'(z) + B_i(z)B_s(z)S(z)} = \frac{B_i(z)B'_m(z)}{A_m(z)}.$$

Après simplifications $R'(z)$ et $S(z)$ doivent vérifier :

$$(z-1)^i A(z)R'(z) + B_i(z)S(z) = A_0(z)A_m(z)$$

Équation polynomiale (équation Diophantine) connue sous l'identité de Bézout admet une solution unique pour $R'(z)$ et $S(z)$, si leurs degrés sont convenables :

$$\text{degré}(S(z)) < \text{degré}(A(z)) + i$$

$$\text{degré}(R'(z)) = \text{degré}(A_0(z)) + \text{degré}(A_m(z)) - \text{degré}(A(z)) - i.$$

Marche suivre :

• *Les données de départ*

- Le processus $\frac{B(z)}{A(z)}$.
- Le modèle $\frac{B_m(z)}{A_m(z)}$ de gain statique 1 avec : $\text{degré}(A_m(z)) - \text{degré}(B_m(z)) \geq \text{degré}(A(z)) - \text{degré}(B(z))$.
- Le polynôme $A_0(z)$ tel que : $\text{degré}(A_0(z)) \geq 2 \text{degré}(A(z)) - \text{degré}(A_m(z)) - \text{degré}(B_s(z)) + i - 1$.
- La région D incluant tous les zéros compensables.
- Le nombre i d'intégrations du correcteur.

• *Marche à suivre*

- $B(z)$ est partagé en deux polynômes : $B(z) = B_i(z)B_s(z)$.
- $B_s(z)$ contient les zéros compensables, sa plus haute puissance de z a 1 pour coefficient.
- $B_m(z)$ est alors choisi tel que : $B_m(z) = B_i(z)B'_m(z)$.
- On pose alors :
 $R'(z) = z^m + r_{m-1}z^{m-1} + \dots + r_1z + r_0$ avec: $\text{degré}(R'(z)) = \text{degré}(A_0(z)) + \text{degré}(A_m(z)) - \text{degré}(A(z)) - i$
 $S(z) = s_nz^n + s_{n-1}z^{n-1} + \dots + s_1z + s_0$ avec: $\text{degré}(S(z)) < \text{degré}(A(z)) + i$.
- On résoud (par identification) : $(z-1)^i A(z)R'(z) + B_i(z)S(z) = A_0(z)A_m(z)$.

• *Résultats*

$$R(z) = B_s(z)R'(z)(z-1)^i; \quad T(z) = B'_m(z)A_0(z).$$

• *Loi de commande*

$$R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z).$$

1. Modélisation :

Dans le cas discret, les intégrateurs sont remplacés par des opérateurs de décalage, de fonction de transfert z^{-1} ; exemple :

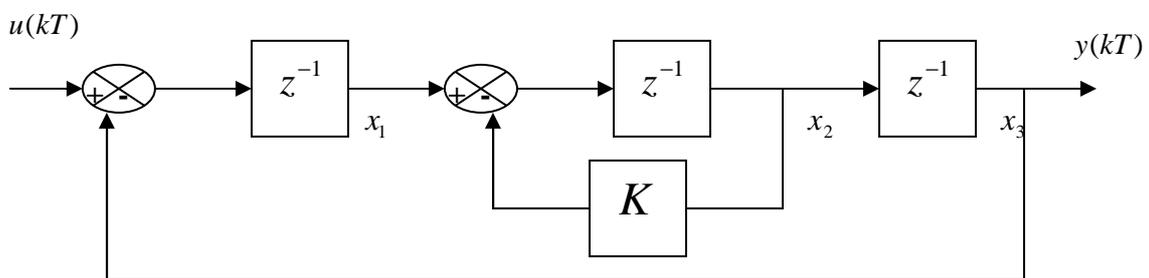


Figure 1.4 Exemple de représentation d'état d'un système discret.

Les équations s'écrivent :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$x \in R^n, y \in R^p, u \in R^m$$

Rappelons que l'équation $X_3(z) = z^{-1}X_2(z)$ se traduit, en représentation temporelle à temps discret par la relation $x_3(k+1) = x_2(k)$. Dou la dénomination d'opérateur de décalage.

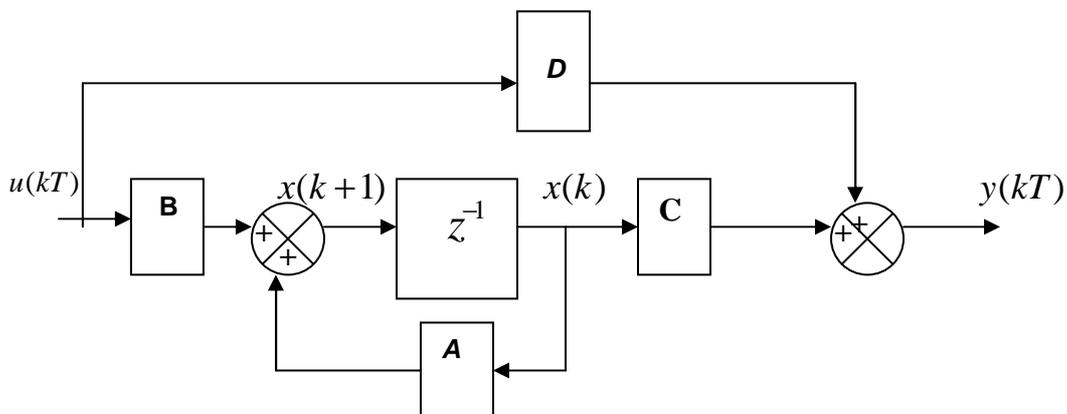


Figure 2.4 Schéma standard pour la forme canonique

- Représentation modale :

Ce mode de représentation permet d'avoir la matrice d'état ou matrice d'évolution A sous forme de matrice de Jordan (cas des pôles multiples) ou diagonale (cas des pôles simples).

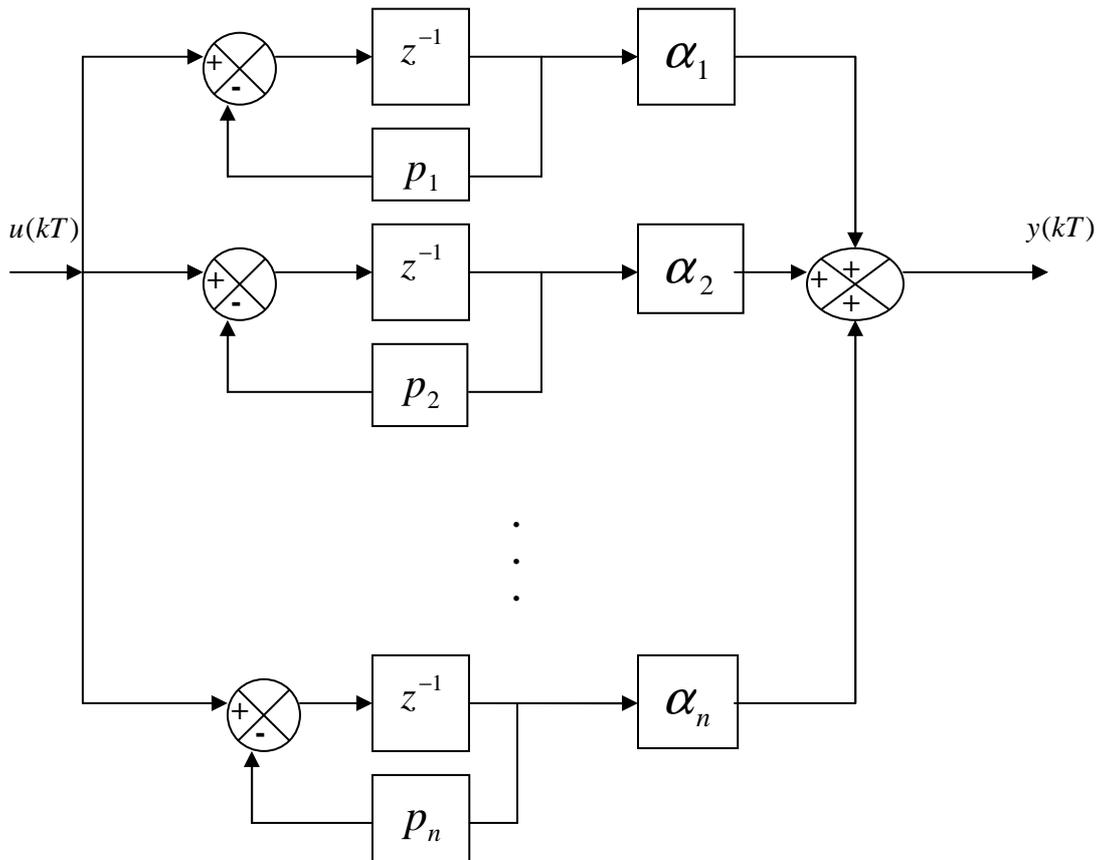


Figure 3.4 Représentation d'état du système discret sous forme modale.

- **Représentation compagne commandable.**

Les formes commandable et observable sont misent en évidence à partir de la transmittance :

$$G(p) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

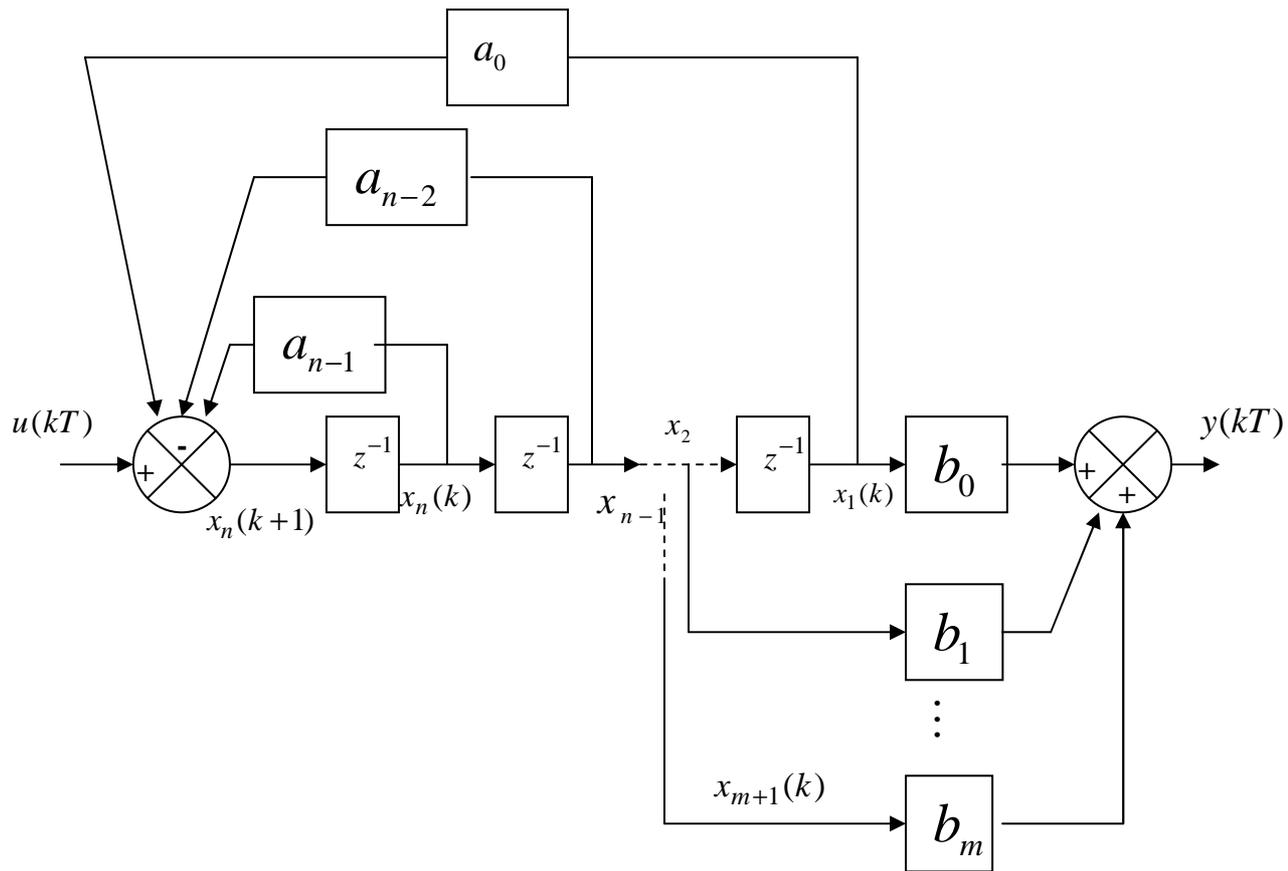


Figure 3.5 Représentation d'état du système discret sous forme commandable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] x(k) \end{cases}$$

- **Représentation compagne observable.**

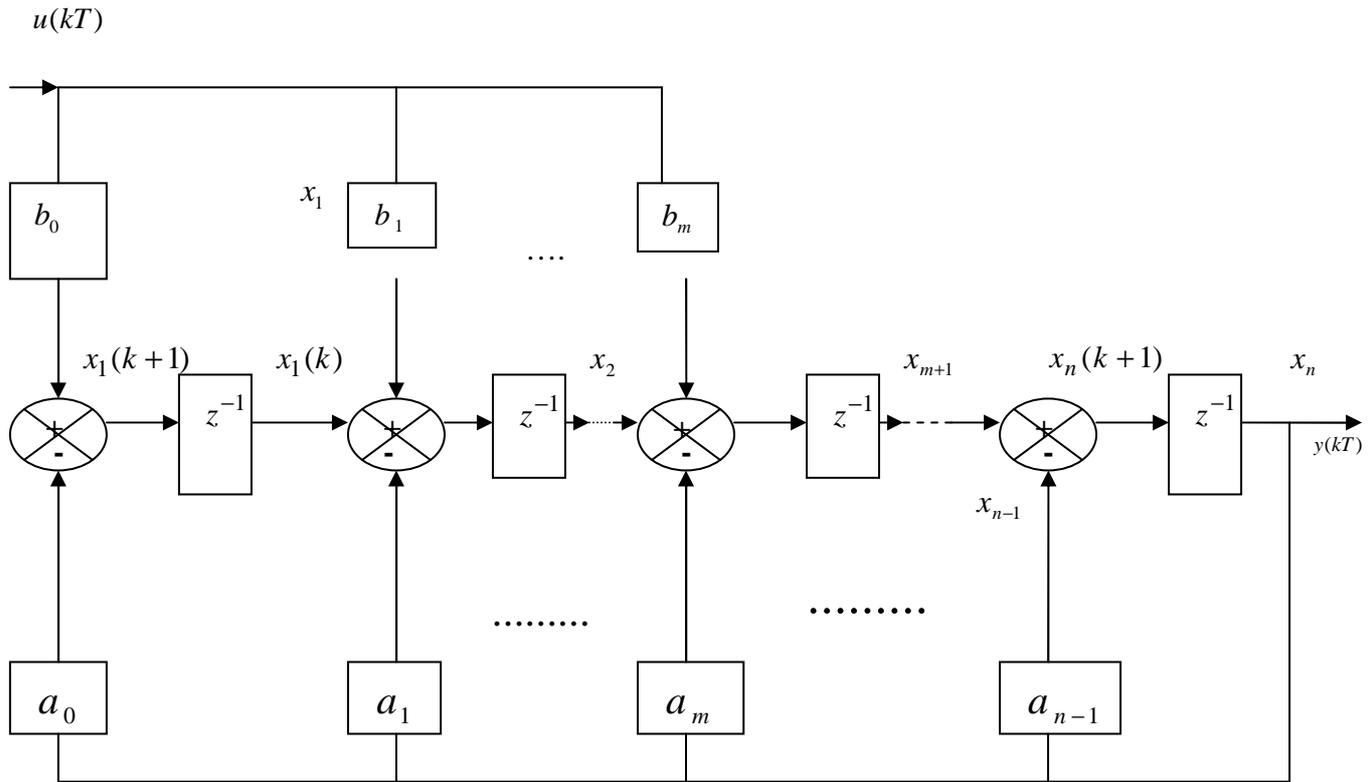


Figure 3.6 Représentation d'état du système discret sous forme observable.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] x(k)$$

Résolution de l'équation d'état :

Résoudre les équations d'état revient à rechercher l'état du système à l'instant k_0 . Comme cet état sera déterminé sans tenir compte de la valeur de l'échantillon d'entrée à cet instant, on parle ici de prédiction de l'état du système.

La solution de l'équation : $y(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ est donnée par :

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=1}^{i=k} A^{i-1} Bu(k-i)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

(Méthode des itérations successives). A^k est la matrice de transition.

Calcul de la matrice de transition :

- Calcul directe : cette matrice se calcule directement en diagonalisant la matrice d'état
 $A : \phi(k) = A^k = M\Delta^k M^{-1}$
- Utilisation de la transformée en z : $\phi(z) = (zI - A)^{-1}$ la transformée en z inverse donne $\phi(k)$.

Equation d'état et fonction de transfert.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1} B + D$$

Passage du continu au discret.

On intègre l'évolution du système entre deux instants d'échantillonnage :

<u>Continu</u>	<u>Discret</u>
Matrice d'évolution A	$\rightarrow F = e^{AT}$
Matrice d'entrée B	$\rightarrow g = \int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau \cdot B$
Matrice de sortie C	$\rightarrow C = p$

Commandabilité d'un système.

Le concept de commandabilité a été introduit par Kalman ; et son critère est le plus utilisé.

Un système est commandable s'il est possible, quel que soit l'intervalle $[k_1, k_2]$ et quelque soit l'état x_2 , de déterminer un signal de commande $u(t)$ sur $[k_1, k_2]$ qui amène le système de n'importe quel état $x(k_1) = x_1$ vers l'état voulu $x(k_2) = x_2$.

Critère de Kalman :

Un système est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, défini par :

$$C_{AB} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ est de rang } n.$$

La paire A, B est complètement commandable si et seulement si, cette matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

On parle aussi d'accessibilité ; un système est dit accessible, s'il est possible de déterminer un signal d'entrée $u(t)$ sur l'intervalle $[k_1, k_2]$ de manière à amener le système d'un état

$x(k_1) = x_1$ vers l'état $x(k_2) = x_2$.

Observabilité d'un système.

Un système est dit observable à un instant t_1 , si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps $[k_1, k_2]$ permet de calculer l'état du système à l'instant t_1 .

Critère d'observabilité :

Le système :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

est observable si et seulement si la matrice d'observabilité définie par :

$$C = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

est de rang n .

La paire A, C est complètement observable si et seulement si, cette matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

Le choix de la période d'échantillonnage est susceptible d'influencer la commandabilité et l'observabilité d'un système. On montre qu'un système à temps discret perd son observabilité et sa commandabilité s'il existe deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 de la matrice A qui possèdent la même partie réelle et dont la différence des parties imaginaires est un multiple de la pulsation d'échantillonnage.

2. Analyse et synthèse :

Stabilité :

En représentation d'état, pour analyser la stabilité d'un système linéaire invariant, deux solutions sont possibles.

- La première consiste à déterminer l'équation caractéristique dont l'expression est donnée par :

$$\det(zI - A) = 0$$

et puis, conclure sur la stabilité (Routh-Hurwitz, Jury).

- La seconde repose sur la méthode de Lyapunov et résulte du théorème suivant : Si deux matrices symétriques définies positives P et Q vérifient l'équation de Lyapunov stationnaire : $A^T P A - P = -Q$, alors le système $x(k+1) = Ax(k)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Inversement, si le système $x(k+1) = Ax(k)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, alors pour toute matrice Q symétrique et définie-positive, l'équation de Lyapunov a une solution unique P symétrique-positive.

Méthode de test de la stabilité :

- 1. Prendre une matrice Q quelconque symétrique et définie-positive. (on prend $Q = I$ pour simplifier les calculs).**
- 2. Résoudre l'équation de Lyapunov $A^T P A - P = -Q$, puis déduire P .**
- 3. Tester si la matrice P obtenue est symétrique définie-positive et conclure sur la stabilité.**

Commande par retour d'état :

Le retour d'état est actuellement l'outil de base de l'automatique ; il fournit une procédure systématique et garantie permettant d'assurer au moins la stabilisation de n'importe quel système linéaire invariant.

En pratique, la commande par retour d'état suppose que toutes les variables d'état sont accessibles (mesurables).

Le but de la conception cette commande par retour d'état consiste à déterminer le vecteur ligne K (vecteur de gain) de façon à satisfaire des spécifications qui reposent sur un placement des valeurs propres en boucle fermée (performances dynamiques) ou sur un placement de structure (fonction de transfert en boucle fermée ou équation d'état). On peut aussi obtenir ces gains matriciels de bouclage en utilisant les principes de commande optimale.

Cette commande par retour d'état impose que le système (A, B) est commandable.

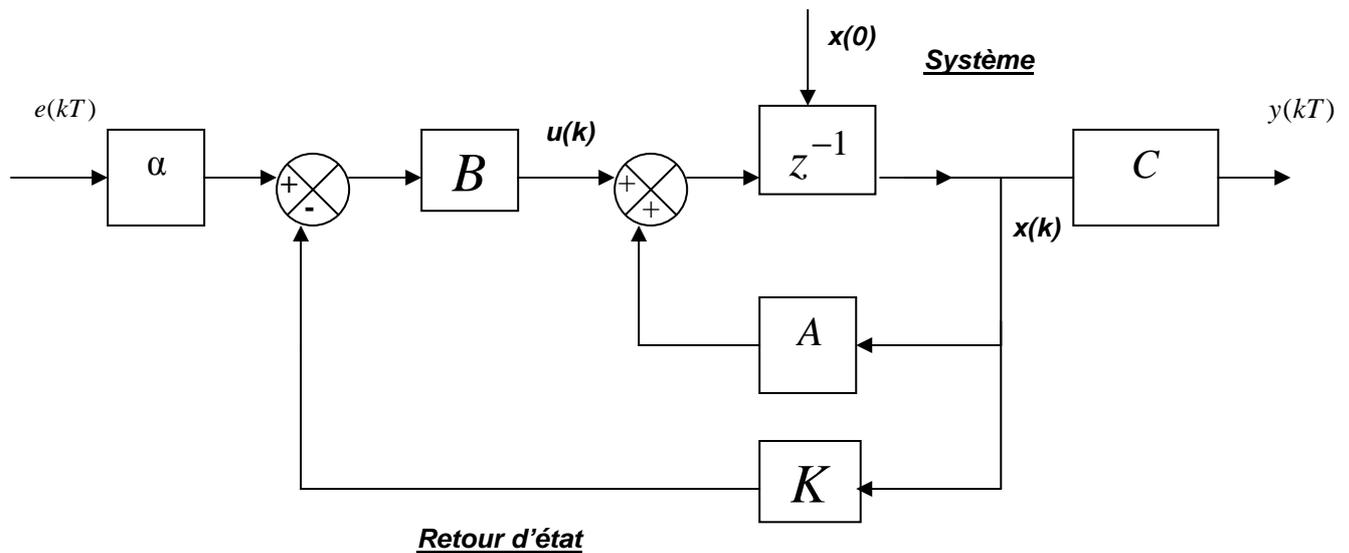


Figure 3.7 Structure de commande par retour d'état (formulation discrète).

La loi de commande est donnée par :

$$u(k) = \alpha e(k) - Kx(k) = \alpha e(k) - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) + B\alpha.e(k)$$

La fonction de transfert en boucle fermée est alors :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = C[pI - A + BK]^{-1} B\alpha$$

Cas multivariable :

Dans le cas multivariable, on réalise une décomposition dynamique puis on effectue une allocation des pôles par la formule de Bass-Gura : méthode qui consiste à ramener le problème multivariable à un problème scalaire (monvariable).

Pour le système :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases},$$

on cherche dans le cas multivariable :

$$u(k) = Kx(k),$$

qui permet de modifier les valeurs propres du système en boucle fermée.

On pose :

$$K = f.d^T \quad \dim(d) = r; \quad \dim(f) = n$$

La décomposition dynamique conduit au schéma suivant :

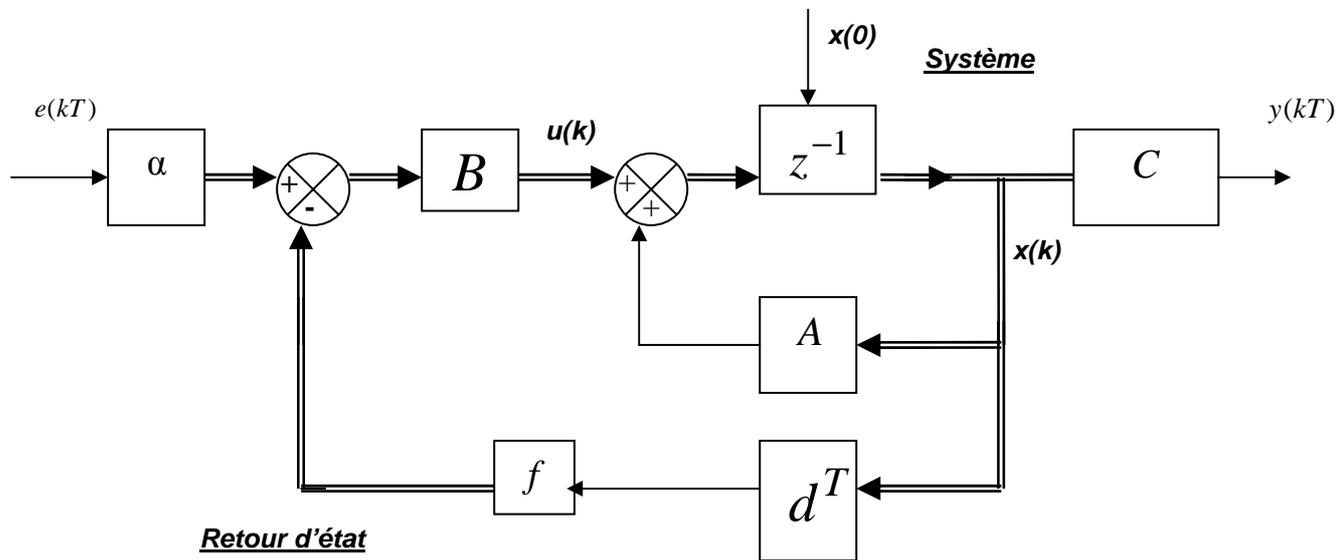


Figure 3.8 Décomposition dynamique.

On boucle fermée :

$$x(k+1) = Ax(k) + B(f.d^T).x(k) + \alpha.e(k) = Ax(k) + \beta w(k) + \alpha.e(k)$$

avec :

$$\begin{cases} \beta = B.f \rightarrow \text{vecteur de dim}(\beta) = n \\ w = d^T x \rightarrow \text{scalaire} \end{cases}$$

Le système est supposé commandable, on peut alors choisir f (qui sera utilisé comme argument de réglage par la suite) et la dynamique est alors imposée en utilisant la commande :

$$w = d^T \cdot x(k)$$

pour commander le système monovariante

$$x(k+1) = Ax(k) + \beta w(k) + \alpha \cdot e(k)$$

en utilisant la formule de Bass-Gurra sur ce système pour calculer d^T , on obtient alors :

$$K = fd^T.$$

Observateurs et estimateurs d'état :

Lorsque toutes les variables d'état ne sont pas mesurables mais le système est complètement observable ; il est alors possible de reconstruire le vecteur d'état à un instant donné à partir de la connaissance du signal de sortie et du signal d'entrée du système sur un intervalle de temps précédent ; on utilise pour ce faire un observateur d'état. Si le système n'est pas complètement observable, il est nécessaire d'estimer le vecteur d'état au moyen d'un estimateur d'état.

L'idée est de fabriquer une simulation du système et d'y ajouter une entrée supplémentaire fonction de l'écart entre la sortie (mesurée) du système et la sortie (calculée) de la simulation de manière à assurer la convergence de l'état estimé vers l'état réel du système.

Observateurs prédictifs ou correcteurs :

Le système discret stationnaire est défini par :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k,$$

On construit un observateur pour ce système :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + G_k,$$

Où G_k est un terme de correction, seulement ici on distingue plusieurs types de corrections donc d'observateurs suivant que la mesure est disponible à l'instant précédent l'estimation ou à l'instant de l'estimation. Dans le premier cas on construit un observateur-prédicteur donnant une estimation de l'état à l'instant $k+1$ d'après ce que l'on connaît à l'instant k , et on note $\hat{x}_{k+1/k}$ cette prédiction. Dans le deuxième cas, on construit un observateur-correcteur,

l'estimation de l'état sera notée $\hat{x}_{k+1/k+1}$.

Observateur -prédicteur :

Dans ce cas on envisage :

$G_k = L^p [y_k - \hat{y}_{k/k-1}]$, où L^p est un gain, ce qui conduit au reconstruc-teur d'état défini par :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A\hat{x}_{k/k-1} + Bu_k + L^p [y_k - \hat{y}_{k/k-1}],$$

avec :

$$\hat{y}_{k/k-1} = C\hat{x}_{k/k-1};$$

ce qui peut s'écrire également :

$$\hat{x}_{k+1/k} = [A - L^p C] \hat{x}_{k/k-1} + Bu_k + L^p y_k.$$

En notant $\tilde{x}_{k+1/k}$ l'erreur de reconstruction

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k},$$

il vient :

$$\tilde{x}_{k+1/k} = [A - L^p C] \tilde{x}_{k/k-1}.$$

Le reconstruteur est asymptotique si le gain L^p est choisi tel que les valeurs propres de la matrice $A - L^p C$ sont, en module $A - L^p C$, inférieures à l'unité (on a une matrice de Schur). Dans le cas où la paire (A, C) est observable, ces valeurs propres peuvent être fixées arbitrairement à l'aide de techniques de synthèses.

Observateur –correcteur :

Dans le cas où y_{k+1} est connue, on peut envisager que $G_k = L^c [y_{k+1} - \bar{y}_{k+1}]$, où L^c est un gain et \bar{y}_{k+1} représente l'estimation de la sortie à l'instant $k+1$ qui peut être réalisée de deux façons différentes : par anticipation (peu utilisée en pratique) ou par prédiction. L'estimation est fournie par la reconstruteur :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = A\hat{x}_{k/k} + Bu_k + L^c [y_{k+1} - \bar{y}_{k+1}].$$

Prédiction :

Dans ce cas, y_{k+1} est la meilleure estimation que l'on puisse faire de la sortie à partir de l'information disponible avant le calcul de $\hat{x}_{k+1/k+1}$. On pose donc :

$$\bar{y}_{k+1} = C[A\hat{x}_{k/k} + Bu_k],$$

Ce qui conduit à la forme de reconstruteur-correcteur :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = [I - L^c] [A\hat{x}_{k/k} + Bu_k] + L^c y_{k+1}.$$

L'erreur de reconstruction est régie par l'équation :

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = [I - L^c C] A \tilde{x}_{k/k}.$$

Si le gain L^c est choisi tel que $[I - L^c C] A$ soit de Schur, le reconstruteur obtenu sera asymptotique. Lorsque la paire (A, CA) est observable, il est toujours possible de trouver L^c correspondant à des dynamiques fixées) à priori pour l'erreur.

Remarques sur les observateurs :

Quel que soit le type d'observateur choisi, le principe de séparation reste valable : commande par retour d'état et observateur peuvent être déterminés séparément.

Deux approches existent pour le choix du gain du reconstruteur d'état, l'une basée sur la notion de placement de pôles, l'autre basée sur la minimisation d'un critère quadratique associé.

Cependant dans ce cas des systèmes discrets, il existe un choix particulièrement intéressant, qui consiste à déterminer L tel que la matrice $A - LC$ soit nilpotente, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres soient nulles. En effet, dans ce cas on obtient un observateur à réponse pile où l'erreur est exactement nulle au bout de $\max\{v_i\}$ pas où les v_i sont les indices d'observabilité.

Notons la différence avec un observateur asymptotique où l'erreur tend vers 0.

Références :

- Yves Granjon-*Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*-Ed.Dunod-2003.
- René Husson, Claude lung, Jean-François Aubry, Jamal Daafouz, Didier Wolf-*Automatique, du cahier des charges à la réalisation de systèmes*-Ed.Dunod-2007.
- Ph.Vanheeghe, C.Sueur, P.Borne-*Automatique des systèmes échantillonnés*-Ed.Technip-2001.
- M.Ksouri, P.Borne-*La commande par calculateurs. Application aux procédés industriels*-Ed.Technip-1999.
- Emmanuel Godoy ey coll.-*Régulation industrielle*-Ed.Dunod-2007.
- Pascal Clerc-*Automatique continue et échantillonnée*-Ed.Masson-1996.
- M.Djemai-*Cours d'automatique linéaire multi variable : espace d'état*-ENSEA-Equipe commande des systemes -djemai@ensea.fr
- J.M.Allenbach-*Ecole d'ingénieur de Genève(EIG)-Laboratoire d'automatique*-2006.
- J.P.Chemla-*Systèmes asservis échantillonnés*-2002.