

Université Aboubekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique et Electronique
GEE

Module Commande Analogique.

Par A.Meghebbar

Sommaire :

Rappels.

Synthèse des lois de commande par approche fréquentielle classique.

Régulateurs PI-PID.

Structures particulières de commande.

Commande dans l'espace d'état.

Chapitre1 Synthèse des lois de commande par approche fréquentielle.

Cahier des charges d'un asservissement/régulation :

En règle générale, le cahier des charges d'une boucle de régulation impose, en boucle fermée, quatre performances :

- la précision, matérialisée par la valeur de l'erreur de position ε_p ($\varepsilon_p \rightarrow 0$ ou la plus faible possible) ; ainsi que celle de l'erreur de vitesse,
- La rapidité, matérialisée par une valeur maximale du temps de réponse ou du temps de montée,
- la marge de stabilité, matérialisée par la valeur de la marge de phase,
- la limitation du dépassement, ce qui se traduit par une valeur optimale du coefficient d'amortissement.

Rôle du correcteur :

Pour assurer une compatibilité entre les critères contradictoires de stabilité et de précision et améliorer les performances du système asservi ,on introduit des dispositifs de correction constitués par des réseaux de transmissions passifs ou actifs(structure câblée).Ces correcteurs ont pour but de délivrer un signal de commande ,noté $u(t)$ au système de manière à préserver les exigences de précision et de stabilité à priori incompatibles ;li sera l'élément intelligent du système.

Principe général de la correction d'un système :

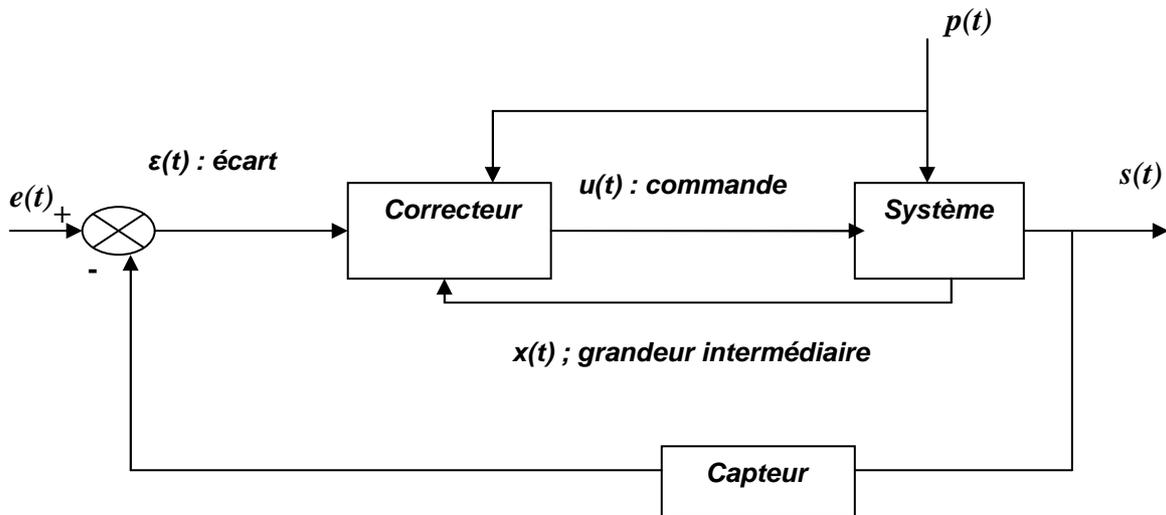


Figure 1.1 Principe général de la correction

$u(t) = f(\varepsilon(t), x(t), p(t) \text{ et } e(t))$: Selon la nature de cette fonction, on distingue différents types de correction. : série, parallèle et par anticipation.

Correction série :

Le correcteur $C(p)$ est introduit dans la chaîne directe en amont du système, son rôle essentiel consiste à modifier les performances du système initial, suivant le cahier de charges. Il agit simultanément sur les précisions statique et dynamique, sur la rapidité et sur la stabilité.

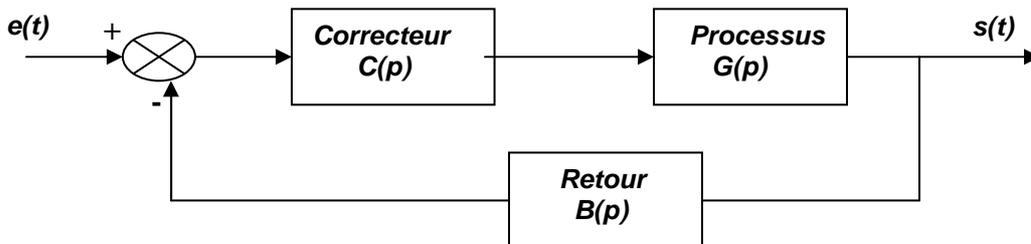


Figure 1.2 Correction série.

Dans ce cas la commande $u(t) = f(\varepsilon)$, on distingue alors trois fonctions :

- La loi de commande proportionnelle ou action proportionnelle notée P :
 $u(t) = K\varepsilon(t) \rightarrow$ Fonction de transfert du correcteur $C(p) = K$.

- Action intégrale, notée I :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt \rightarrow \text{Fonction de transfert du correcteur } C(p) = \frac{1}{T_i p} .$$

- Action dérivée, notée D :

$$u(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \rightarrow \text{Fonction de transfert du correcteur } C(p) = T_d p .$$

Un correcteur série réalise plus ou moins parfaitement des combinaisons de ces trois actions. En première approximation on peut dire que l'action P augmente la bande passante et par conséquent la rapidité et la précision dynamique ; l'action I annule l'erreur statique mais entraîne un effet déstabilisant enfin l'action D par un apport de phase complémentaire, tend à stabiliser le système.

Correction parallèle :

La correction parallèle ne permet pas l'introduction d'une intégration ; le correcteur $C(p)$ se greffe en parallèle sur un élément fixe de la chaîne et agit essentiellement sur la stabilité et la rapidité.

Correction par anticipation :

Le correcteur $C(p)$ appelé aussi compensateur élimine théoriquement l'influence des perturbations $p(t)$.

Exemple :

Les effets de la perturbation $p(t)$ sont compensés par $C_{comp}(p)$

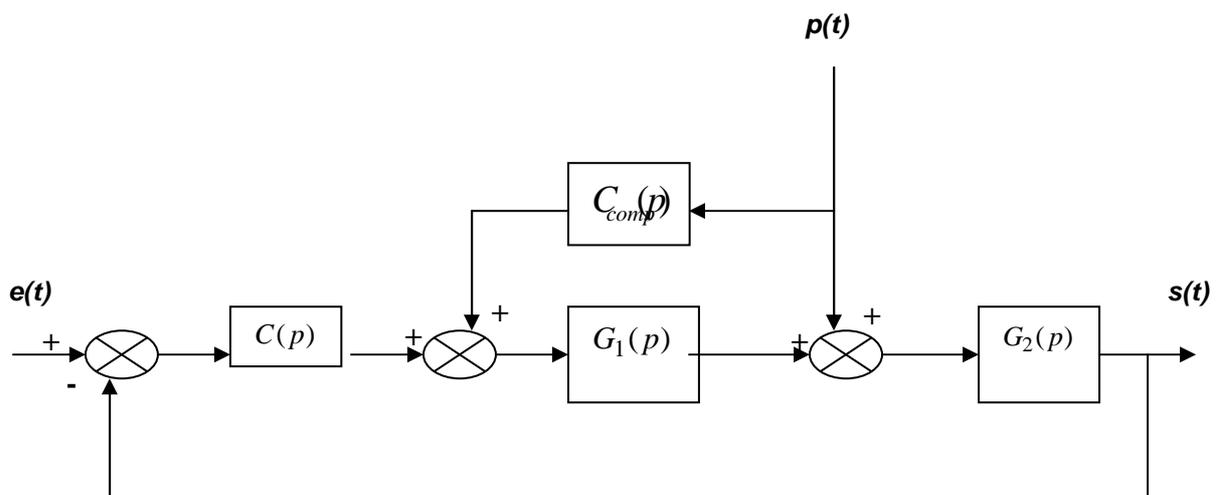


Figure 1.3 Compensateur : $C_{comp.}(p) = -\frac{1}{G_1(p)}$

Correction série.

Principe de correction et structure des correcteurs :

1. Correcteur proportionnel :

Le correcteur proportionnel est un simple amplificateur de gain réglable, $C(p) = K$. Si $K > 1$, on améliore la rapidité et la précision du système en boucle fermée mais on diminue la stabilité et on accroît son dépassement.

- **Action du correcteur :**

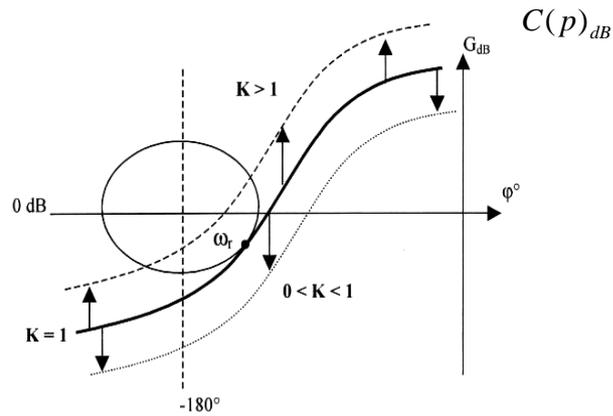
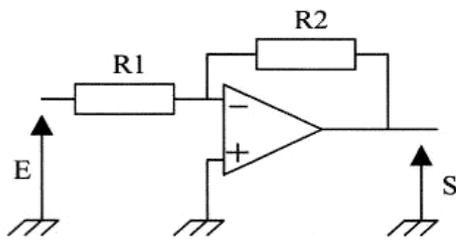


Figure 1.4 Action du correcteur, lieu de Black.

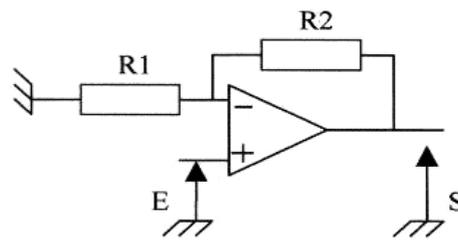
Ce correcteur équivaut à une translation de la courbe dans le plan de Black et de la courbe du module dans le plan de Bode.

- Circuit électrique :



Montage Ampli inverseur

$$C(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = -\frac{R_2}{R_1}$$



Montage Ampli non inverseur

$$C(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Figure 1.5 Circuit électrique du correcteur proportionnel.

2. Correcteur proportionnel et intégral :

- Fonction de transfert du correcteur proportionnel et intégral :

$$C_{dB} = K \left(1 + \frac{1}{\tau p} \right)$$

- Lieu de transfert du correcteur proportionnel et intégral :

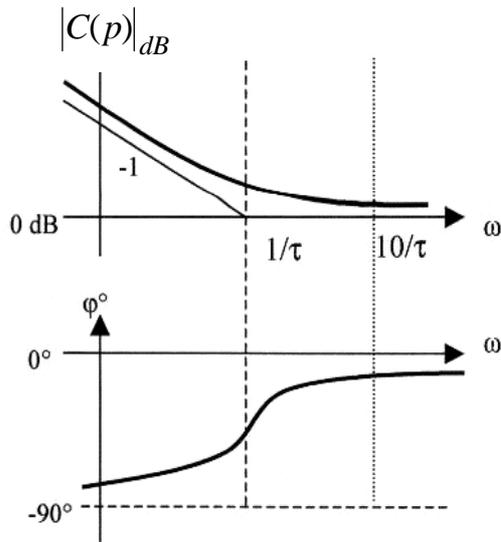


Figure 1..6 Lieu de transfert du correcteur proportionnel et intégral.

- Action du correcteur :

Ce correcteur introduit un pôle à l'origine. L'action de ce correcteur se fait sur les basses fréquences. La présence d'un intégrateur annule l'erreur statique, mais il ralentit le système et le déstabilise s'il est mal placé. Il n'influe pratiquement plus la phase pour les hautes

fréquences ($\omega > \frac{10}{\tau}$).

- Mise en place : (Méthode du pôle dominant).

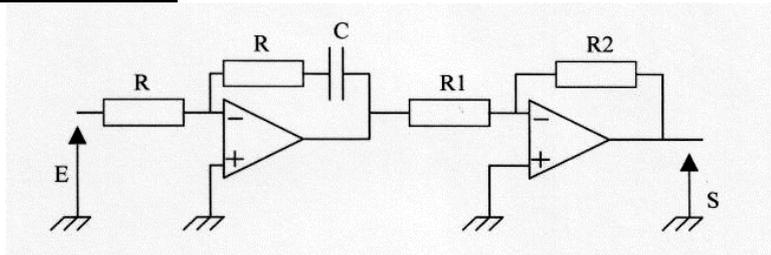
1. *Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte,*

2. *Supprimer le pôle dominant $\tau = -\frac{1}{p_{\min}}$ = constante de temps la plus grande (le pôle*

dominant correspond à la plus grande constante de temps du système, donc au pôle dominant car c'est lui qui limite la rapidité du système),

3. *Déterminer K pour avoir une marge de phase suffisante (ou celle imposée par le cahier de charge).*

- Circuit électrique :



$$\tau = R \cdot C$$

$$K = \frac{R_2}{R_1}$$

Figure 1.7 Circuit électrique du correcteur proportionnel et intégral.

3. Correcteur à retard de phase :

On utilise généralement le correcteur à retard de phase de fonction de transfert :

$$C(p) = K \frac{1 + \tau.p}{1 + b\tau.p} \quad \text{avec } b > 1$$

- Lieu de transfert du correcteur à retard de phase :

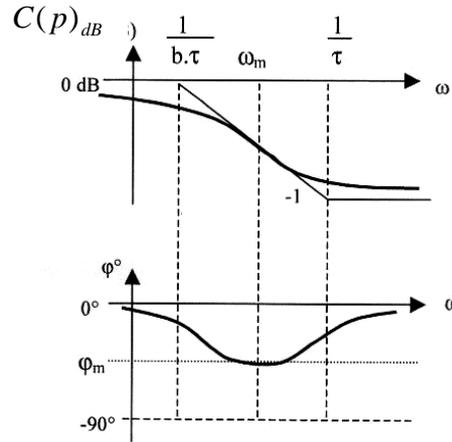


Figure 1.8 Lieu de transfert du correcteur à retard de phase.

Avec les relations :

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi_m = \frac{1-b}{1+b}$$

Action du correcteur :

Agit en basses fréquences, il permet de réduire l'erreur statique, il ralentit le système (diminue la bande passante), et le déstabilise s'il est mal placé (τ petit).

Si $\frac{1}{\tau} \prec \omega_{co}$ (la pulsation de coupure en boucle ouverte), on augmente la marge de phase en conservant un bon gain en basses fréquences, mais on a une diminution de la bande passante, dans ce cas, l'effet du correcteur a la forme suivante (lieu de Black):

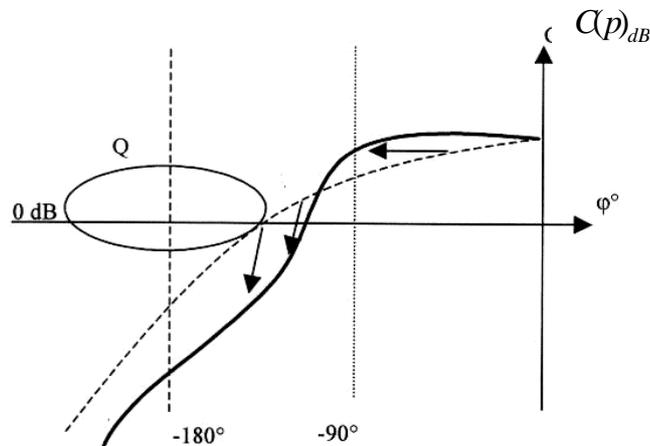
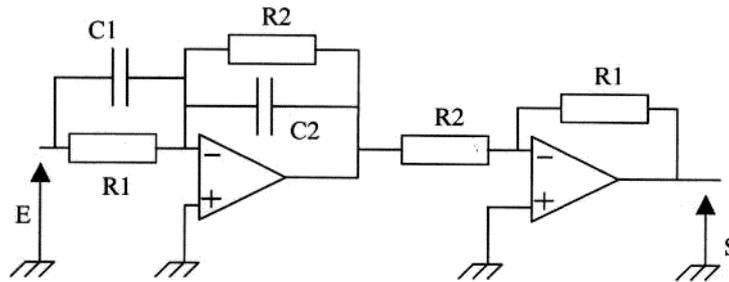


Figure 1.9 Effet du correcteur à retard de phase (lieu de Black).

- Circuit électrique :



$$C(p) = \frac{1 + R_1 C_1 p}{1 + R_2 C_2 p} \quad \text{avec} \quad R_2 C_2 \gg R_1 C_1$$

Figure 1.10 Circuit électrique du correcteur à retard de phase.

4. Correcteur proportionnel et dérivée / Correcteur à avance de phase.

- Fonction de transfert du correcteur proportionnel et dérivée :

$C(p) = K(1 + \tau p)$.Le gain de ce correcteur est infini pour les hautes fréquences.

Ceci est donc physiquement irréalisable, on l'approxime par : $C(p) = K \frac{1 + \tau_d p}{1 + \tau p}$

avec τ très petit devant τ_d .

- Lieu de transfert du correcteur proportionnel et dérivée :

$$C(p)_{dB}$$

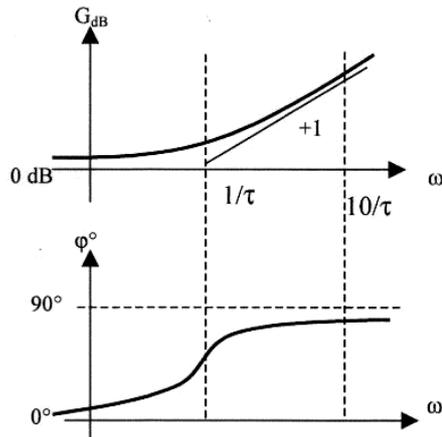


Figure 1.11 Lieu de transfert du correcteur proportionnel et dérivée(Bode).

- Action du correcteur:

L'action de ce correcteur se fait sur les hautes fréquences.

Son effet est stabilisant et à tendance à augmenter la rapidité. On remarque aussi, sur son lieu

de Bode, que ce correcteur induit un gain infini en hautes fréquences et qu'à $\frac{10}{\tau}$, le gain

apporté est de 20dB et la phase apportée est quasiment de 90°

Pour être efficace, ce correcteur doit vérifier : $\frac{1}{\tau} \prec \omega_R$ c'est-à-dire l'effet doit se produire suffisamment tôt.

Il y a donc augmentation de la marge de phase, de la marge de gain, de la pulsation de résonance et de la bande passante.

De plus, en augmentant K, on augmente la stabilité et la précision du système.

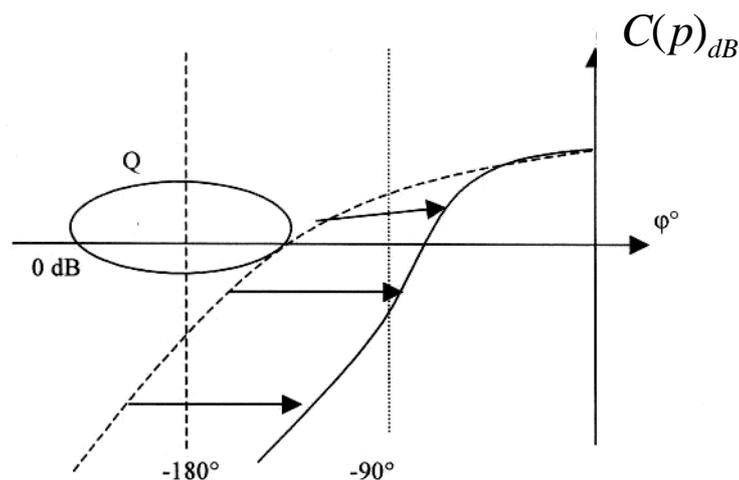
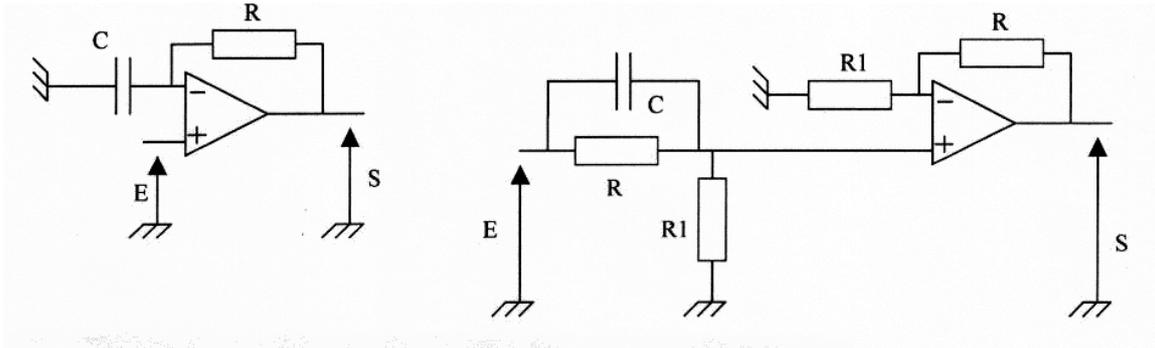


Figure 1.12 Effet du correcteur proportionnel et dérivée (lieu de Black).

- Circuit électrique :



$$C(p) = K(1 + \tau p) \qquad C(p) = \frac{1 + RCp}{1 + \frac{RR_1C}{R + R_1} p}$$

Figure 1.13 Circuit électrique du correcteur proportionnel et dérivé.

D'une manière générale, on utilise le correcteur à avance de phase qui a un effet semblable au correcteur proportionnel et dérivé dans une importante bande de fréquences.

- Fonction de transfert du correcteur à avance de phase.

$$C(p) = K \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad \text{avec } a > 1.$$

- Lieu de transfert du correcteur à avance de phase.

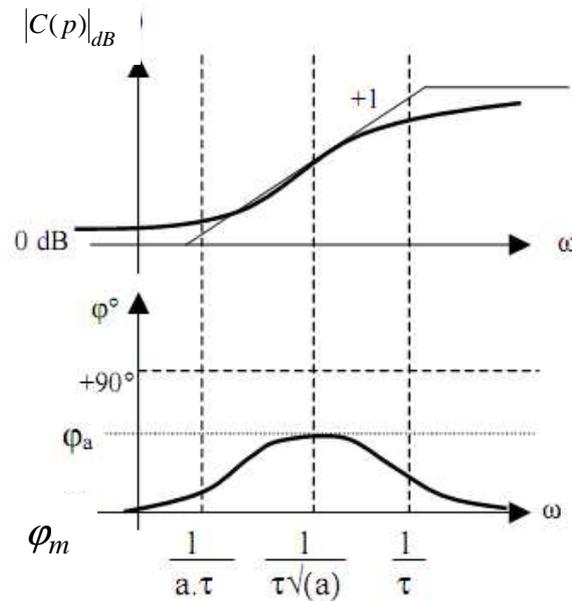


Figure 1.14 Lieu de transfert du correcteur à avance de phase (Bode).

Ce correcteur permet d'augmenter la rapidité du système et apporte une avance de phase qui est maximum à la pulsation ω_m :

Ce correcteur est essentiellement théorique ; en pratique, on traite la partie action dérivée par un avance de phase. Le filtrage n'intervient alors que sur les hautes fréquences. Les racines du numérateur de $C(p)$ sont réelles si :

$$\Delta = T_i^2 - 4T_i T_d = T_i^2 \left(1 - \frac{4T_d}{T_i}\right) = 0$$

D'où la condition : $T_d \leq \frac{T_i}{4}$

$C(p)$ s'écrit alors : $C(p) = \frac{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}{\tau p}$

τ_1 et τ_2 réels ; $\tau_{1,2} = \frac{\tau}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}}\right)$

Avec $\tau_2 < \tau = T_i < \tau_1$

Lieu de transfert du correcteur :

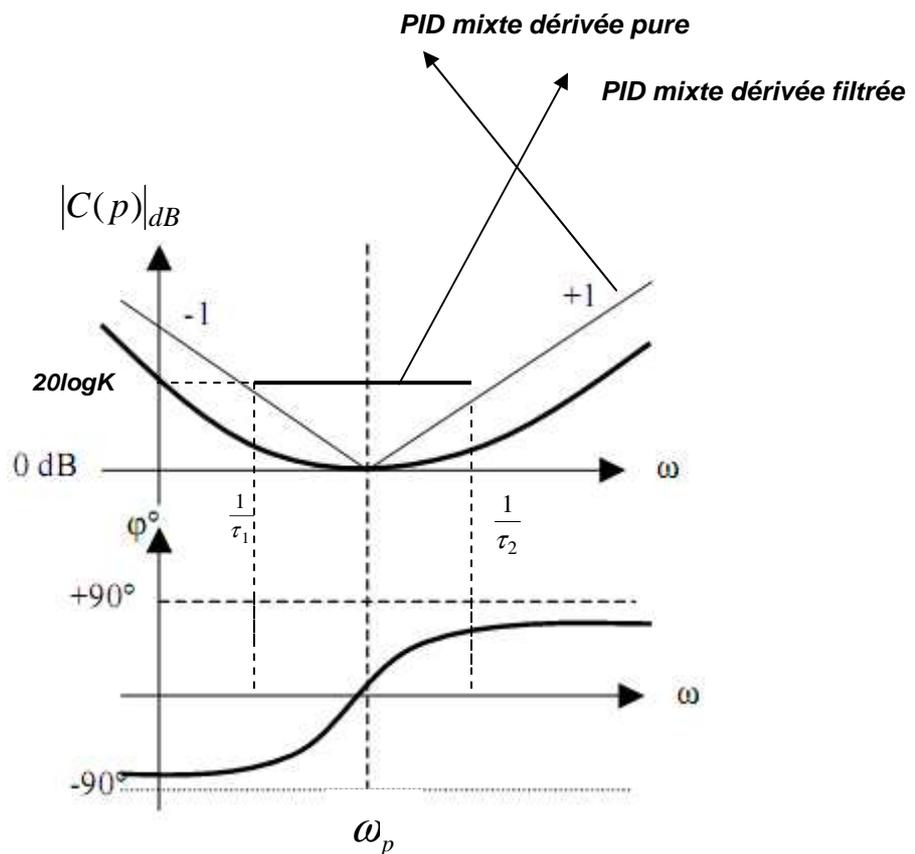


Figure 1.17 Lieu de transfert du correcteur PID (Bode)

Pour $\omega = \omega_p$: $\text{Arg}(C(j\omega_p)) = \text{arctg } \tau_1 \omega_p + \text{arctg } \tau_2 \omega_p - \frac{\pi}{2} = 0$

Soit encore :
$$\operatorname{arctg} \frac{\tau_1 \omega_p + \tau_2 \omega_p}{1 - \tau_1 \tau_2 \omega_p^2} = \frac{\pi}{2}$$

Condition réalisée si : $1 - \tau_1 \tau_2 \omega_p^2 = 0$ d'où $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}}$ et $|C(j\omega_p)| = K$.

Ce point particulier du lieu de transfert est appelé point de pivot, les actions intégrales et dérivées non aucune influence.

- **Action du correcteur :**
L'action de ce correcteur se fait sur toutes les fréquences. Son effet est stabilisant, il annule l'erreur statique, il contribue à augmenter la rapidité.
- **Synthèse du PID dans le plan de Black :**

Conditions de réglage satisfaisant : $\frac{1}{T_i} < \omega_R$ et $\frac{1}{T_d} < \omega_R$

On constate, dans le lieu de Black, l'augmentation de la précision statique due à l'intégration ; de plus, l'avance de phase permet d'accroître le gain K et par conséquent, la pulsation de résonance et la pulsation de coupure.

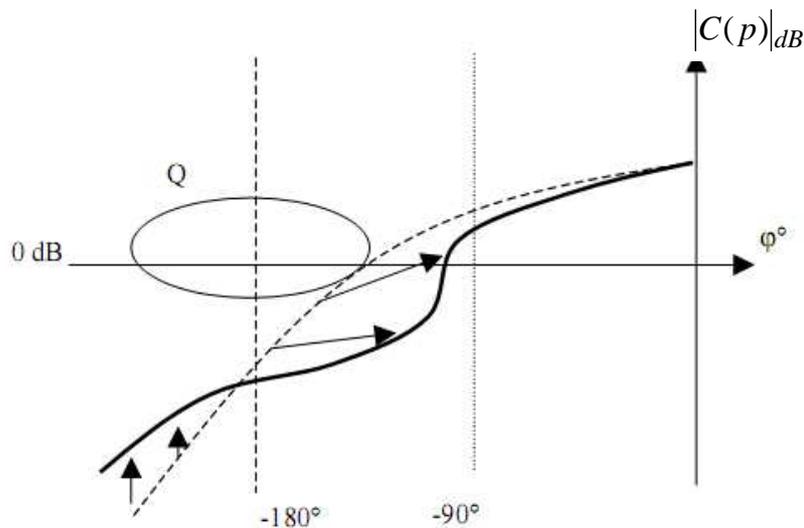


Figure 1.18 Effet du correcteur PID (lieu de Black).

- **Circuit électrique :**

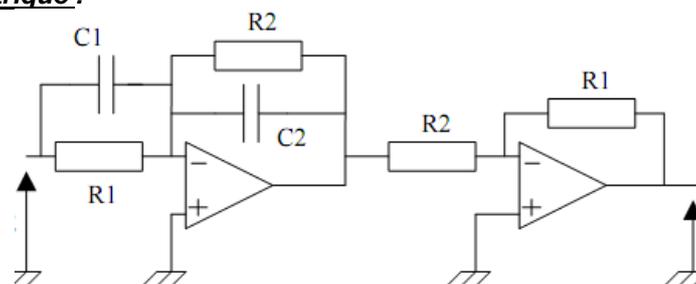


Figure 1.19 Circuit électrique du PID.

6. Correcteur avance et retard de phase :

Ce réseau est plus proche des réalisations physiques des PID. Sa fonction de transfert

s'écrit :
$$C(p) = K \left(\frac{1}{T_i p} + \frac{1 + a\tau.p}{1 + \tau.p} \right); a > 1$$

En basses fréquences, ce correcteur à action de type proportionnelle et intégrale permettant ainsi d'avoir une bonne précision statique.

En hautes fréquences, le comportement se rapproche de celui du système à avance de phase combinant ainsi les intérêts des deux autres types de régulation.

Chapitre 2 :

Les modèles d'état.

La notion de systèmes dynamiques montre que la modélisation la plus riche est celle qui utilise la notion d'état puisqu'elle représente un ensemble de variables a priori plus grand que celui constitué par les entrées et sorties. Cette représentation d'état est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret et qui possède en outre l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes et se prête bien au développement des programmes de calculateurs qui permettent l'analyse ou la synthèse des systèmes dynamiques.

Les variables d'état représentent à chaque instant, l'ensemble minimal d'informations nécessaires pour déterminer l'évolution ultérieure d'un système ; est se fait essentiellement dans le domaine temporel.

- Etat d'un système et variable d'état.

Considérons le système représenté sur la figure 2.1. Ce système est composé d'une cascade d'éléments différents et la commande automatique d'un tel système peut très bien aller beaucoup plus loin que la seule ambition de réguler le signal de sortie.

Un certain nombre de signaux, que l'on peut qualifier d'internes au système apparaissent nettement sur le schéma notés x_1, x_2 , et x_3 .

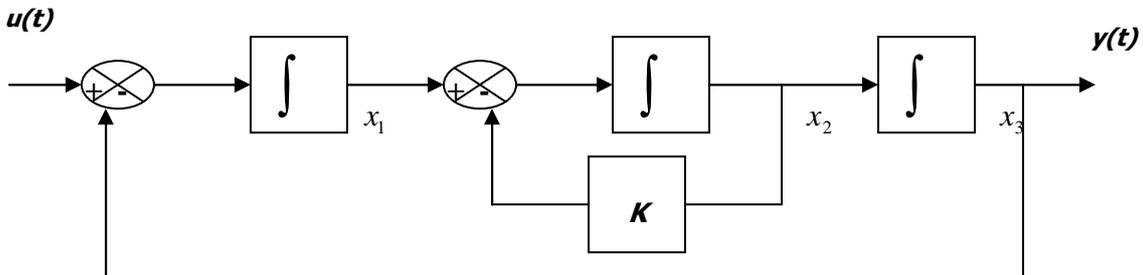


Figure 2.1 Exemple de représentation d'état d'un système continu.

Ces variables internes choisies sont appelées variables d'état du système. La commande du système ne se réduit donc pas au simple asservissement du signal de sortie mais peut donc être considéré comme la maîtrise simultanée de l'évolution des trois signaux x_1, x_2 , et x_3 . On dit que l'ensemble de ces trois signaux forme le vecteur d'état et la modélisation va permettre d'envisager la commande de cet état grâce au signal d'entrée.

A partir de la figure 2.1, on calcule la dérivée de chaque variable d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - y = u - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - Kx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Qui s'écrit : $\dot{x} = Ax + Bu(t)$

Comme $y(t) = x_3$, on écrit : $y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

On exprime donc l'évolution du système, modélisée par un vecteur constitué de dérivées premières des composantes du vecteur d'état, en fonction du vecteur d'état x du système.

Dans le cas général le système peut avoir plusieurs entrées et plusieurs sorties. Soit n le nombre de variables d'état, m le nombre d'entrées et p le nombre de sorties.

Dans ces conditions, l'équation d'état d'un système LTI sous forme canonique s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x \in R^n, y \in R^p, u \in R^m.$$

La première équation s'appelle l'équation de commande ; la seconde, équation d'observation.

A ($n \times n$) est la matrice d'état,

B ($n \times m$) est la matrice d'entrée,

C ($p \times n$) est la matrice de sortie,

D ($p \times m$) est le transfert direct (ou couplage) entrée/sortie.

Le vecteur d'état x représente en pratique, la mémoire du système, et la connaissance des conditions initiales est nécessaire pour prévoir son évolution future.

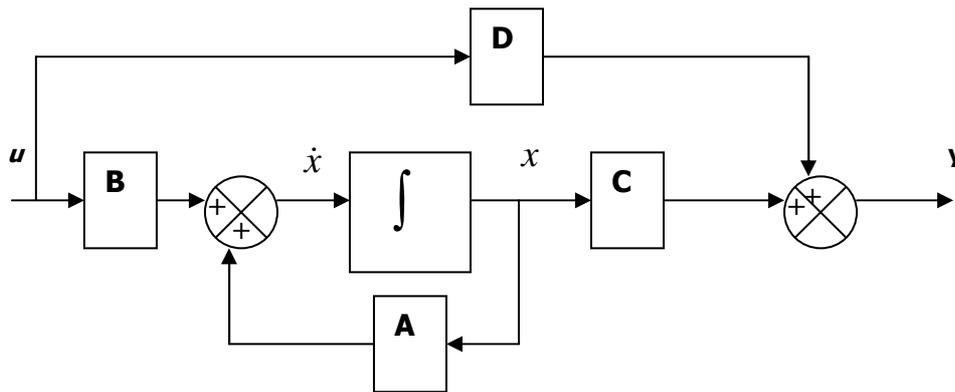


Figure 2.2 Schéma standard pour la forme canonique

Il est rare que la sortie soit directement liée à son entrée. On a donc très souvent $D = 0$.

► **Gain statique :**

Le point d'équilibre pour une entrée $u(t) = u_\infty$ est donnée par $\dot{x}_\infty = 0$; soit :

$$0 = A\dot{x}_\infty + Bu_\infty.$$

Si la matrice A est inversible, c'est-à-dire s'il n'y a pas de valeurs propres nulles ou pas de pôles nuls dans la fonction de transfert, alors :

$$y_\infty = -CA^{-1}Bu_\infty = Ku_\infty$$

$$K = -CA^{-1}B = G(p)_{p=0}$$

K est le gain statique.

► **Gain dynamique :**

Lorsque le système contient une ou plusieurs actions intégrales, ce n'est plus la sortie qui tend vers une constante pour une entrée nulle mais sa dérivée ou sa dérivée $n^{\text{ième}}$. Le rapport entre la valeur finale de cette dérivée et l'entrée est appelé le gain dynamique.

- Représentations équivalentes.

Les systèmes dont le fonctionnement est décrit par des équations différentielles ou des équations de récurrences linéaires à coefficients constants sont appelés systèmes LTI pour les systèmes Linéaires à Temps Invariant. Les matrices A, B, C et D sont donc des matrices à coefficients constants.

- **Représentation classique :**

Ce mode de représentation est déduit directement de l'équation différentielle (cas continu) ou de l'équation de récurrence (cas discret).

Exemple : système masse-ressort-amortisseur.

L'équation différentielle du second ordre s'écrit :

$$m \frac{d^2 l(t)}{dt^2} + b \frac{dl(t)}{dt} + kl(t) = f(t)$$

m, b, k et l sont respectivement la masse, le coefficient d'amortissement, la constante de raideur du ressort et l'élongation.

Conditions initiales : $l(0) = 0$ et $\frac{dl(t)}{dt} = v_0$

On écrit l'équation précédente sous forme différentielle du premier ordre :

$$x_1(t) = l(t) = y(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = \frac{dl(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dl(t)}{dt} \rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{d^2 l(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x_1(t) - \frac{b}{m} x_2(t) + \frac{1}{m} f(t)$$

$$x_1(0) = 0 \text{ et } x_2(0) = v_0$$

Un tel système se met alors sous la forme d'équation d'état dite classique :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$u(t) = f(t) \text{ et } D = 0$$

- **Représentation modale :**

Ce mode de représentation permet d'avoir la matrice d'état ou matrice d'évolution A sous forme de matrice de Jordan (cas des pôles multiples) ou diagonale (cas des pôles simples).

Exemple : Cas des pôles simples :

Pour la transmittance :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$Y(p) = \frac{U(p)}{p+1} - \frac{U(p)}{p+2} ;$$

On pose :

$$X_1(p) = \frac{U(p)}{p+1} \rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$

$$X_2(p) = \frac{U(p)}{p+2} \rightarrow \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

D'où l'écriture modale :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad -1] x(t)$$

Les variables x sont des variables canoniques puisque A est diagonale. Les pôles α_i simples déterminent les modes $e^{\alpha_i t}$ du système.

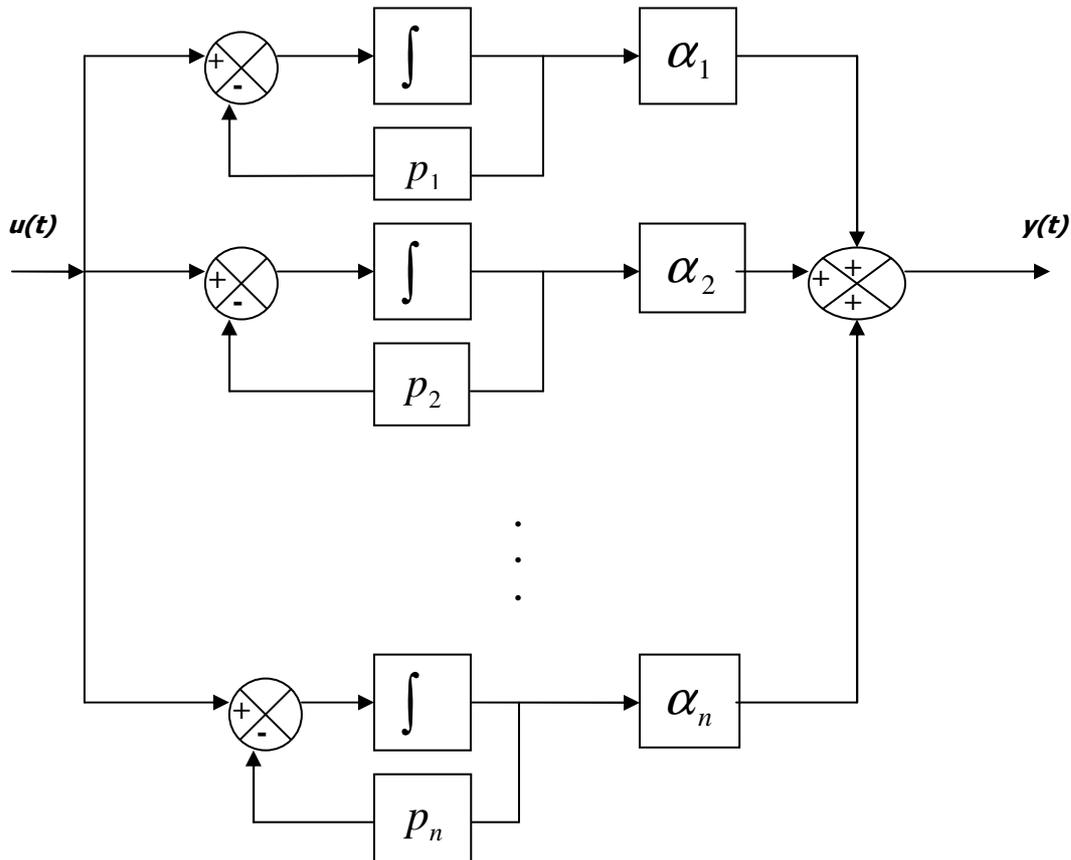


Figure 2.3 Représentation d'état du système continu sous forme modale.

Dans le cas d'un système du second ordre :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

Les pôles complexes conjugués sont non décomposables ; on utilise alors la représentation d'état suivante :

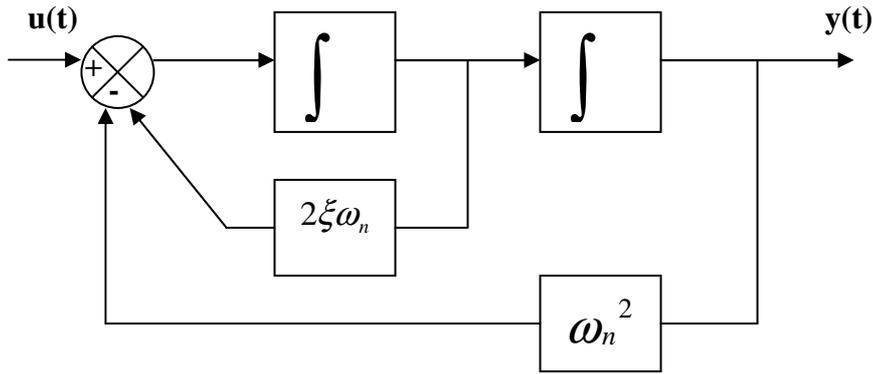


Figure 2.4 *Représentation d'état d'un bloc du second ordre non décomposable.*

- **Représentation compagne commandable.**

La fonction de transfert n'est factorisée, et s'écrit :

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \text{ avec } n \geq m.$$

Pour $a_n = 1$ (on divise le numérateur et le dénominateur par a_n), divisons le numérateur et le dénominateur par n , on obtient :

$$G(p) = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On peut alors écrire :

$$Y(p) = \frac{U(p)}{D(p)} \cdot N(p) = R(p)N(p)$$

$$R(p) = \frac{U(p)}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

Soit :

$$R(p) \left[1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n} \right] = U(p)$$

$$R(p) = E(p) - \left[a_{n-1} \left(\frac{1}{p} \right) + \dots + a_1 \left(\frac{1}{p} \right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{1}{p} \right)^n \right] R(p)$$

Si on pose :

$$X_n(p) = \frac{R(p)}{p}, X_{n-1}(p) = \frac{R(p)}{p^2}, \dots, X_1(p) = \frac{R(p)}{p^n},$$

On obtient : $R(p) = E(p) - [a_{n-1} X_n(p) + \dots + a_1 X_2(p) + a_0 X_1(p)]$

On peut alors choisir les x_i comme composantes du vecteur d'état, d'où la représentation d'état :

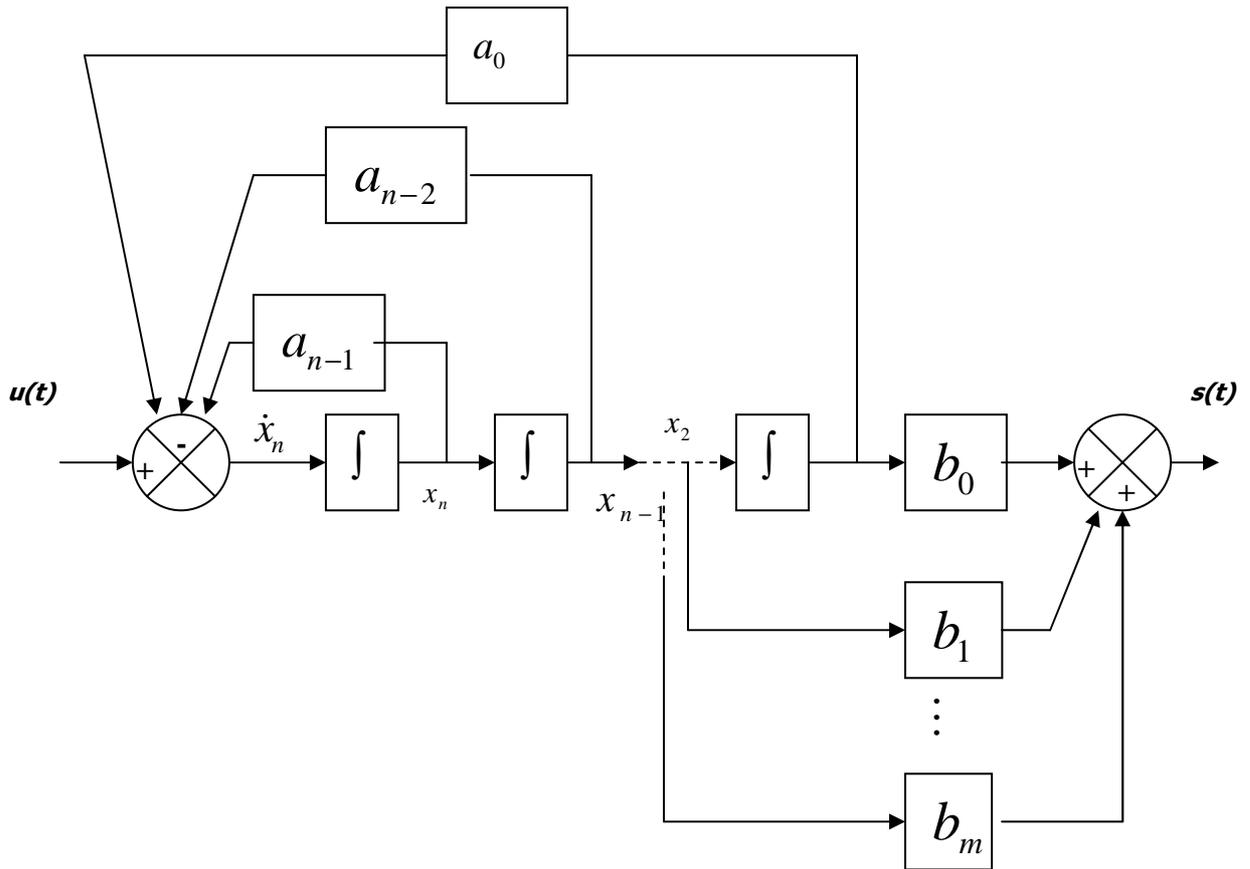


Figure 2.5 *Représentation d'état compagne commandable.*

Le signal de sortie s'écrit alors :

$$Y(p) = [b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}] R(p)$$

D'où :

$$Y(p) = b_m X_{m+1}(p) + b_{m-1} X_m(p) + \dots + b_1 X_2(p) + b_0 X_1(p).$$

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_n x_n + u(t)$$

$$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m+1}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] x(t) \end{cases}$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne commandable car la matrice de commande du système contient, en une seule ligne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert. Elle est dite commandable, bien que seule la variable x_n soit directement affectée par le signal d'entrée, toutes les variables d'état s'en trouvent influencées par intégrations successives.

Si un système est commandable, alors on peut le mettre sous forme compagne commandable.

- **Représentation compagne observable.**

La forme de $G(p)$ déjà transformée s'écrit :

$$G(p) = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On peut ensuite écrire :

$$Y(p) = -[a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_0 p^{-n}] Y(p) + [b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}] U(p)$$

D'où :

$$S(p) = \left[a_{n-1} \left(\frac{1}{p} \right) + \dots + a_1 \left(\frac{1}{p} \right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{1}{p} \right)^n \right] S(p) + \left[b_m \left(\frac{1}{p} \right)^{n-m} + \dots + b_0 \left(\frac{1}{p} \right)^n \right] U(p)$$

Et la représentation d'état suivante :

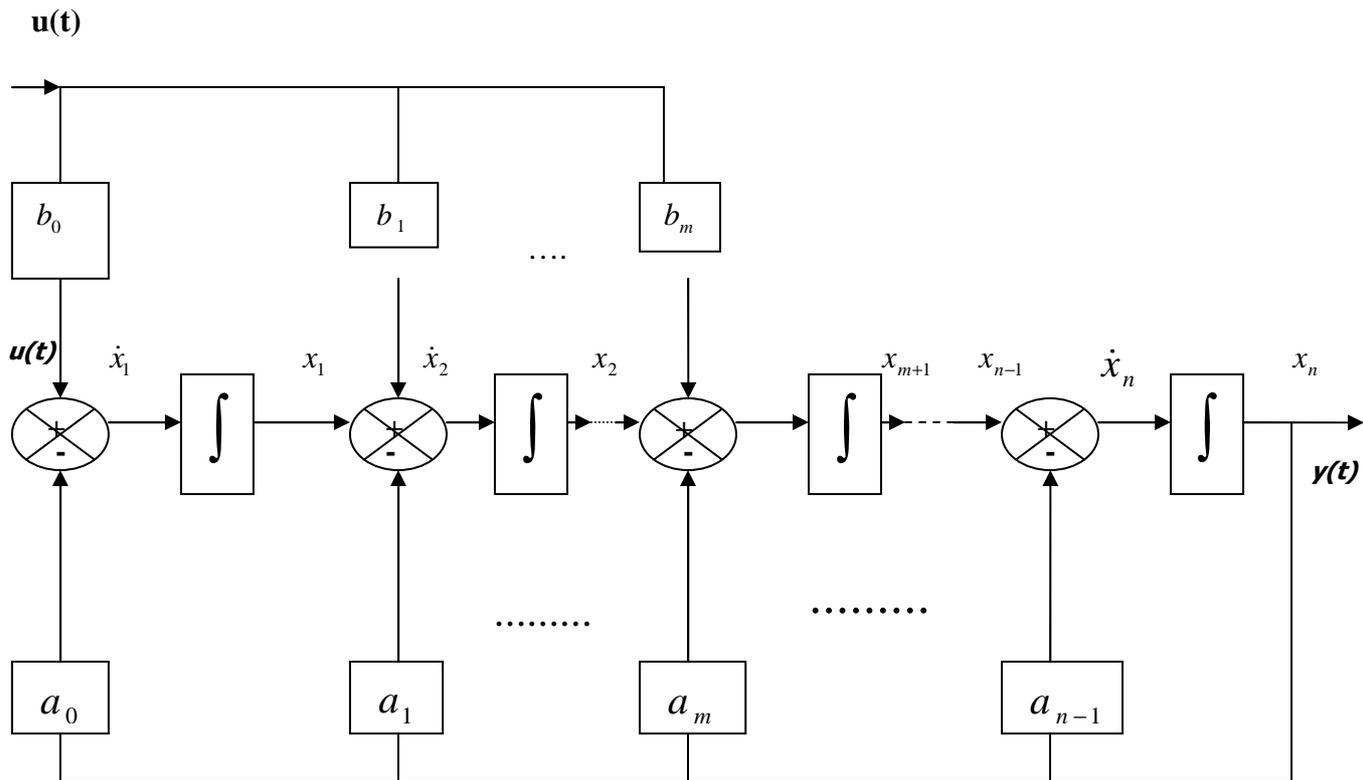


Figure 2.6 *Représentation d'état compagne observable.*

Les équations se déduisent directement de cette représentation :

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_n + b_0 u(t)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_n + b_1 u(t)$$

$$\dot{x}_{m-1} = x_{m-2} - a_{m-1} x_n + b_{m-1} u(t)$$

⋮

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} x_n$$

$$y(t) = x_n$$

D'où :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] x(t)$$

Cette représentation est appelée forme compagne observable car, outre le fait que la matrice de commande du système contient, en une seule colonne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, on remarque que la sortie de ce système est égale à x_n qui, par intégrations successives, est bien influencée par toutes les variables d'état. Si un système est complètement observable, alors on peut le mettre sous forme compagne observable.

- **Résolution des équations d'état. Matrice de transition d'état.**

Résoudre les équations d'état consiste à déterminer l'expression du vecteur d'état $x(t)$ en fonction du temps.

La solution générale de l'équation : $\dot{x} = Ax + Bu$ est donnée par la théorie des équations

différentielles : $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$.

Cette expression est la somme de la solution de l'équation correspondant au régime libre(ou

autonome), soit $e^{A(t-t_0)}x(t_0)$ et de la solution correspondant au régime forcé(ou commandé).

L'opérateur $e^{A(t)}$ est appelé matrice de transition d'état, notée $\phi(t)$, elle décrit la transition en régime libre de $x(t_0)$ à $x(t)$.

$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \dots$; **I représente la matrice carrée identité de dimension n .**

La sortie est donnée par : $y(t) = Cx(t) + Du(t)$.

Calcul de la matrice de transition :

- **Utilisation de la transformée de Laplace.**

Passage aux transformées de Laplace de $\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow pX(p) - X(0) = AX(p) + BU(p)$

Soit : $(pI - A)X(p) = x(0) + BU(p)$

D'où : $X(p) = (pI - A)^{-1}x(0) + (pI - A)^{-1}BU(p)$

Il en résulte $\phi(p) = (pI - A)^{-1}$; la transformée de Laplace inverse donne $\phi(t)$.

- **Méthode de diagonalisation.**

Diagonalisation de la matrice d'état A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice sont définis par : $A(v_i) = \lambda_i(v_i)$

Les vecteurs non nuls (v_i) sont les vecteurs propres de A ; les λ_i sont ses valeurs propres qui sont les racines de l'équation caractéristique de la matrice A définie par :

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Si on appelle Δ la matrice diagonale formée des valeurs propres de la matrice A et M la matrice modale formée des vecteurs propres, on a :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ et } M = [(v_1) \quad (v_2) \quad \dots \quad (v_n)]$$

Dans ces conditions : $A = M\Delta M^{-1}$

Par conséquent : $e^{At} = M \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot M^{-1}$

- **Equation d'état et fonction de transfert.**

Le système étant décrit par :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$D = 0$$

Passage aux transformées de Laplace : $pX(p) = Ax(p) + Bu(p)$
 $Y(p) = CX(p)$

$$X(p) = (pI - A)^{-1} BU(p) \text{ .Conditions initiales nulles.}$$

D'où la fonction de transfert : $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1} B$

Si $y = Cx(t) + Du(t)$; alors : $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1} B + D$

- **Commandabilité d'un système.**

Le concept de commandabilité a été introduit par Kalman ; et son critère est le plus utilisé.

Un système est commandable s'il est possible, quel que soit l'intervalle $[t_1, t_2]$ et quelque soit l'état x_2 , de déterminer un signal de commande $u(t)$ sur $[t_1, t_2]$ qui amène le système de n'importe quel état $x(t_1) = x_1$ vers l'état voulu $x(t_2) = x_2$.

Critère de Kalman :

Un système est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, défini par :

$$C_{AB} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ est de rang } n.$$

La paire A, B est complètement commandable si et seulement si, cette matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

On parle aussi d'**accessibilité** ; un système est dit accessible, s'il est possible de déterminer un signal d'entrée $u(t)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ de manière à amener le système d'un état $x(t_1) = x_1$ vers l'état $x(t_2) = x_2$.

- **Observabilité d'un système.**

Un système est dit observable à un instant t_1 , si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ permet de calculer l'état du système à l'instant t_1 .

Critère d'observabilité :

Le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

est observable si et seulement si la matrice d'observabilité définie par :

$$C = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

est de rang n .

La paire A, C est complètement observable si et seulement si, cette matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

- **Stabilité**

En représentation d'état, pour analyser la stabilité d'un système linéaire invariant, deux solutions sont possibles.

- La première consiste à déterminer l'équation caractéristique dont l'expression est donnée par :

$$\det(pI - A) = 0, \text{ (Cas continu)}$$

et puis, conclure sur la stabilité (Routh-Hurwitz, Jury).

- La seconde repose sur la méthode de Lyapunov et résulte du théorème suivant :
Si deux matrices symétriques définies positives P et Q vérifient l'équation de Lyapunov stationnaire : $A^T P + PA = -Q$, alors le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Inversement, si le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, alors pour toute matrice Q symétrique et définie-positive, l'équation de Lyapunov a une solution unique P symétrique-positive.

Méthode de test de la stabilité :

1. Prendre une matrice Q quelconque symétrique et définie-positive.(on prend $Q = I$ pour simplifier les calculs).
 2. Résoudre l'équation de Lyapunov $A^T P + PA = -Q$, puis déduire P .
 3. Tester si la matrice P obtenue est symétrique définie-positive et conclure sur la stabilité.
- Dans le cas discret l'équation de Lyapunov s'écrit : $A^T P A - P = -Q$

Chapitre 3 Analyse et Synthèse des systèmes continus dans l'espace d'état.

- Stabilité

En représentation d'état, pour analyser la stabilité d'un système linéaire invariant, deux solutions sont possibles.

- La première consiste à déterminer l'équation caractéristique dont l'expression est donnée par :

$$\det(pI - A) = 0,$$

et puis, conclure sur la stabilité (Routh-Hurwitz).

- La seconde repose sur la méthode de Lyapunov et résulte du théorème suivant :

Si deux matrices symétriques définies positives P et Q vérifient l'équation de Lyapunov stationnaire : $A^T P + PA = -Q$, alors le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Inversement, si le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, alors pour toute matrice Q symétrique et définie-positive, l'équation de Lyapunov a une solution unique P symétrique-positive.

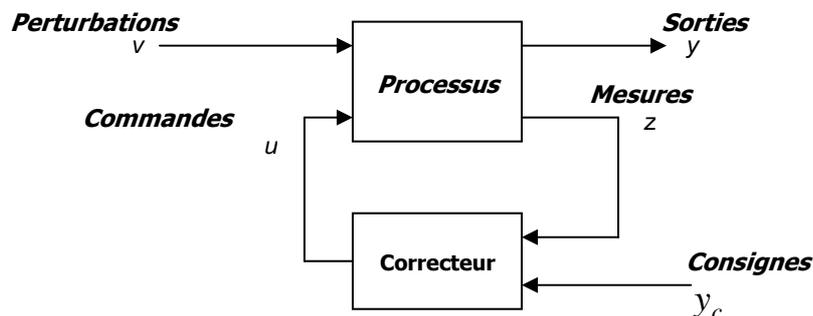
Méthode de test de la stabilité :

1. Prendre une matrice Q quelconque symétrique et définie-positive. (on prend $Q = I$ pour simplifier les calculs).
2. Résoudre l'équation de Lyapunov $A^T P + PA = -Q$, puis déduire P .
3. Tester si la matrice P obtenue est symétrique définie-positive et conclure sur la stabilité.

- Commande dans l'espace d'état.

Le système invariant est décrit par une représentation d'état linéaire à temps continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B'v(t) \\ y(t) = C'x(t) \\ z(t) = Cx(t) \end{cases}$$



Objectif : à partir des mesures z , le correcteur doit générer des commandes u qui permettent d'asservir les sorties y sur des signaux de consignes y_c , en rejetant le mieux possible les perturbations v .

Les signaux z , y , v , u sont a priori des vecteurs (cas multi variable).

La synthèse de la commande s'effectue en trois étapes, qui sont relativement indépendantes :

- la synthèse par retour d'état

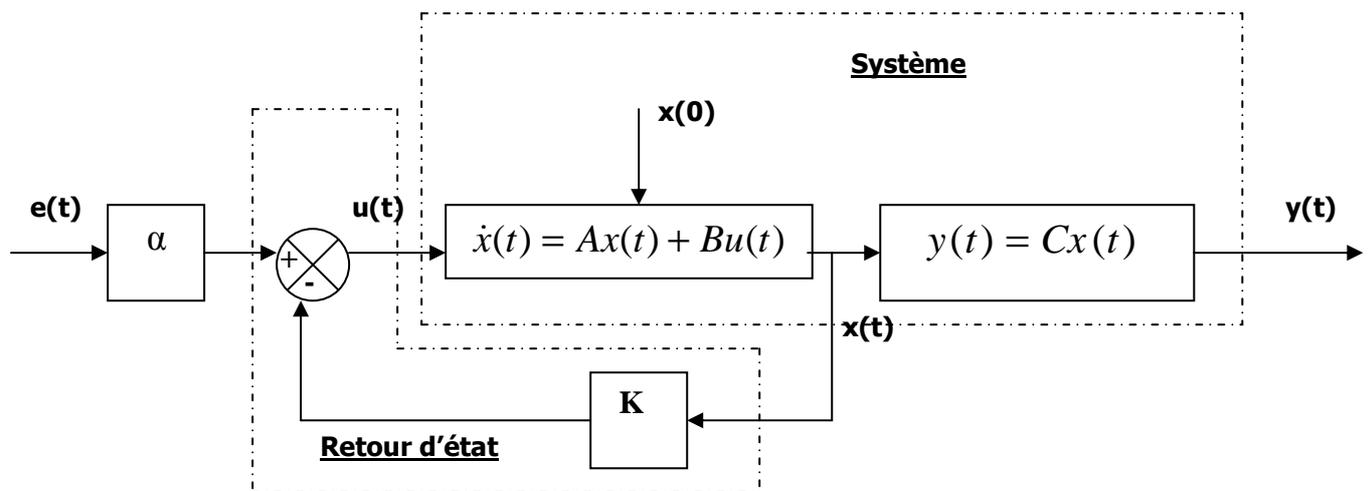
- la synthèse d'un observateur
- l'association du retour d'état et de l'observateur

- Commande par retour d'état

Le retour d'état est actuellement l'outil de base de l'automatique ; il fournit une procédure systématique et garantie permettant d'assurer au moins la stabilisation de n'importe quel système linéaire invariant.

En pratique, la commande par retour d'état suppose que toutes les variables d'état sont accessibles (mesurables).

Cas continu :



Structure de commande par retour d'état(formulation continue).

On utilise l'état $x(t)$ du système pour construire le signal de commande $u(t)$ par un bouclage de la forme :

$$u(t) = \alpha.e(t) - Kx(t) = \alpha.e(t) - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

α est un gain de pré bouclage.

Le but de la conception cette commande par retour d'état consiste à déterminer le vecteur ligne K (vecteur de gain) de façon à satisfaire des spécifications qui reposent sur un placement des valeurs propres en boucle fermée (performances dynamiques) ou sur un placement de structure (fonction de transfert en boucle fermée ou équation d'état). On peut aussi obtenir ces gains matriciels de bouclage en utilisant les principes de commande optimale.

Cette commande par retour d'état impose que le système (A, B) est commandable.

Fonction de transfert en boucle fermée (placement de structure) :

Le système en boucle ouverte est régi par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

On a alors :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(\alpha.e(t) - Kx(t)),$$

Soit :

$$\dot{x}(t) = [A - BK]x(t) + B\alpha.e(t),$$

Passage aux transformées de Laplace :

$$X(p) = [pI - A + BK]^{-1} B\alpha E(p),$$

D'où la fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = C[pI - A + BK]^{-1} B\alpha.$$

Dans le cas d'un placement de pôles pour un système commandable, on identifie le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée tenant compte du retour d'état avec le dénominateur de la fonction de transfert obtenue à partir du cahier de charges.

Exemple :

Considérons le système défini par : $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ **et** $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Le système est commandable ; on souhaite placer ce système dans une boucle à retour d'état avec un vecteur de gain $K = [k_1 \quad k_2]$, de manière à obtenir une marge de phase égale à 60° et un temps de montée de 3s.

Ces performances correspondent à une fonction de transfert du second ordre caractérisée par un facteur d'amortissement $\zeta = 0.6$ et une pulsation propre $\omega_n = 1 \text{rd/s}$, autrement dit possédant un dénominateur $D(p)$ tel que :

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta p}{\omega_n} + 1 = p^2 + 1.2p + 1$$

On identifie le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée tenant compte du retour d'état à $D(p)$:

$$\det[pI - A + BK] = p^2 + 1.2p + 1$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} p+2+k_1 & 2+k_1 \\ 1-2k_2 & p+3-2k_2 \end{vmatrix} = p^2 + 1.2p + 1$$

$$(p+2+k_1)(p+3-2k_2) - (1-2k_2)(2+k_1) = p^2 + 1.2p + 1$$

$$p^2 + (5+k_1-2k_2)p + (4+k_1) = p^2 + 1.2p + 1$$

D'où :

$$\begin{cases} 4+k_1 = 1 \\ 5+k_1-2k_2 = 1.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 0.4 \end{cases}$$

Le vecteur de gain qui assure au système les performances voulues en boucle fermée est donc :

$$K = [-3 \quad 0.4].$$

Points sur la commande par retour d'état :

- La commande par retour d'état nécessite la connaissance du vecteur d'état (accessibilité à la mesure),
- Dans le cas contraire, on fait appel à un observateur d'état, c'est un système dédié dont la fonction consiste à reconstruire le vecteur d'état à partir des mesures accessibles sur les entrées et les sorties du système (deux cas sont à considérer : système non bruité et système présentant des bruits sur les mesures ou sur les commandes),
- Le retour d'état peut avoir également comme objectif de découpler l'effet des entrées sur les sorties (cas des systèmes multivariables). Les méthodes de découplage conduisent souvent à des retours d'état dynamiques, par opposition à ceux envisagés ici, dits retour d'état statique.

- Observateurs et estimateurs d'état

Lorsque toutes les variables d'état ne sont pas mesurables mais le système est complètement observable ; il est alors possible de reconstruire le vecteur d'état à un instant donné à partir de la connaissance du signal de sortie et du signal d'entrée du système sur un intervalle de temps précédent ; on utilise pour ce faire un observateur d'état. Si le système n'est pas complètement observable, il est nécessaire d'estimer le vecteur d'état au moyen d'un estimateur d'état.

L'idée est de fabriquer une simulation du système et d'y ajouter une entrée supplémentaire fonction de l'écart entre la sortie (mesurée) du système et la sortie (calculée) de la simulation de manière à assurer la convergence de l'état estimé vers l'état réel du système.

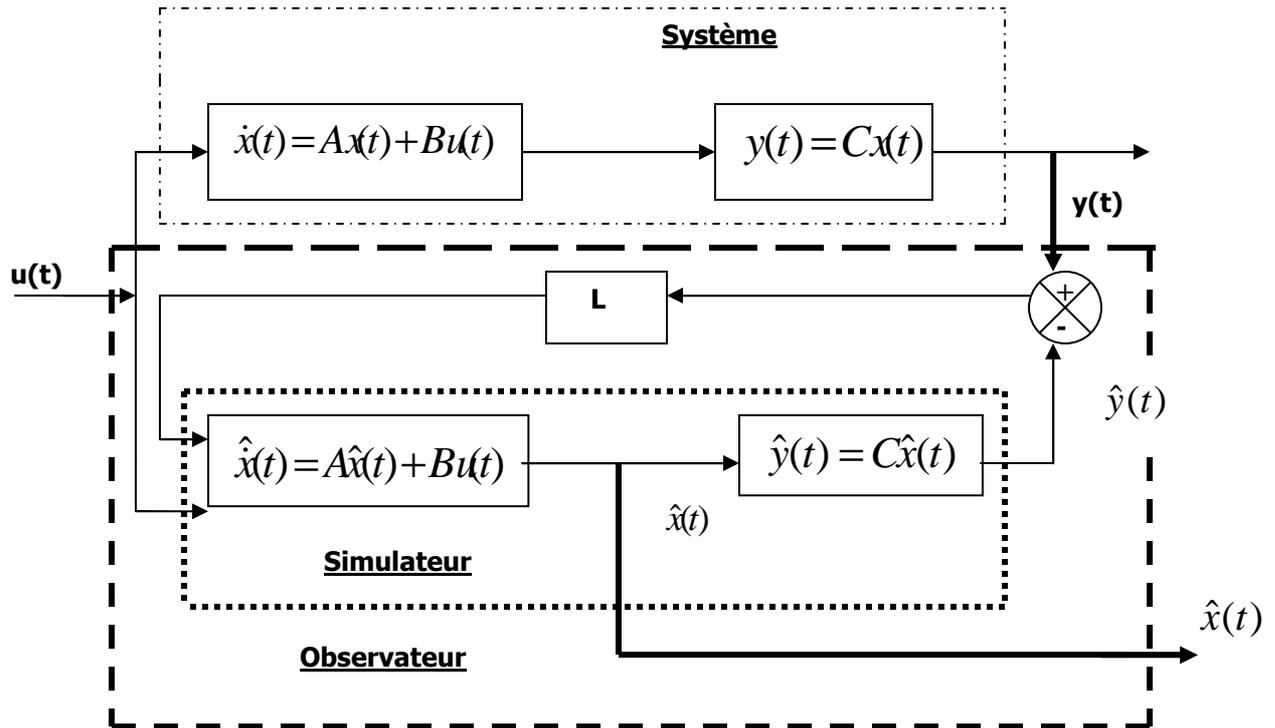
Cas continu :

On considère le système dont le modèle d'état est donné par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad '$$

On note par $\hat{x}(t)$ l'estimé de $x(t)$ à l'instant t ;



Observateur (formulation continue).

Mise en équations :

On définit l'erreur d'estimation $\varepsilon(t)$ par :

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) ;$$

Lorsque $x(t) = \hat{x}(t)$, on peut admettre que les états sont les mêmes et l'état $\hat{x}(t)$ reconstruit, représente le vecteur d'état $x(t)$ inconnu.

L'objectif consiste donc à faire converger ce vecteur vers un vecteur constant le plus faible possible (idéalement vers 0) et, ce le plus rapidement possible.

La structure de l'observateur est de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)]$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

où apparaît le terme correctif en fonction de l'erreur de reconstruction de la sortie, $y(t) - \hat{y}(t)$, et le gain de correction L , appelé gain de l'observateur est à déterminer.

Cette structure peut être écrite sous la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t).$$

Si on considère l'erreur d'estimation :

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

On obtient :

$$\dot{\hat{\varepsilon}}(t) = (A - LC)\hat{\varepsilon}(t),$$

Ce qui conduit à l'évolution de l'erreur d'estimation à partir de la condition initiale $\mathcal{E}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$, qui est non nulle de façon générale parce que l'état est a priori inaccessible :

$$\hat{\mathcal{E}}(t) = e^{[(A-LC)]t} \mathcal{E}(0).$$

Pour que l'observateur soit utilisable il est nécessaire que cette erreur tende vers 0 lorsque t augmente. Lorsque cette propriété est satisfaite l'observateur est dit asymptotique, mais il est évident que c'est une propriété nécessaire au fonctionnement correct de l'observateur. En conséquence il faudra choisir L telle que les valeurs propres de la matrice (A - LC) soient toutes à parties réelles strictement négatives.

En pratique on choisit une dynamique d'erreur plus rapide que celle du processus.

Utilisation de l'observateur en boucle fermée pour la commande par retour d'état (régulateur-observateur):

La loi de commande s'écrit alors :

$$u(t) = \alpha e(t) - Kx(t), \text{ et } D \neq 0.$$

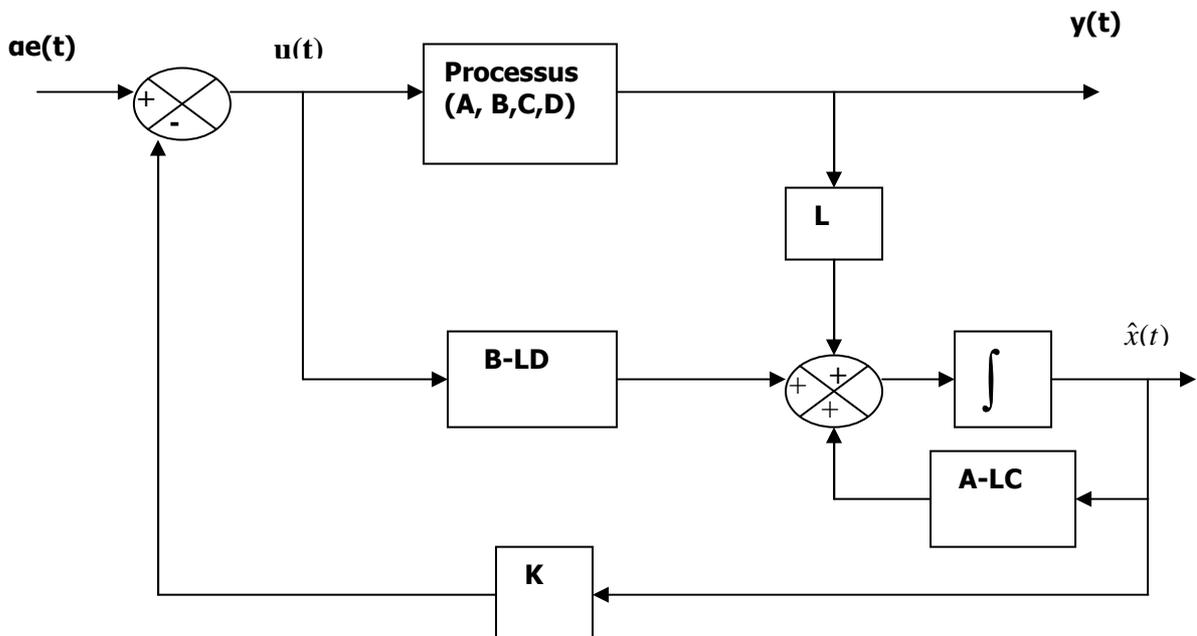
Comme l'état n'est pas accessible, la commande réellement mis en œuvre devient :

$$u(t) = \alpha e(t) - K\hat{x}(t),$$

Equations d'état en boucle fermée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\alpha \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = [C-DK \quad DK] \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + D\alpha e(t)$$



Commande par régulateur-observateur (formulation continue).

Les dynamiques du système commandé par un régulateur-observateur en boucle fermée c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

Sont construites de la réunion de celles désirées en boucle fermée et celles de l'observateur. Ainsi on peut régler de façon indépendante le problème de la régulation et le problème de régulation c'est le principe de séparation.

* Fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(p) = D\alpha + [C - DK \quad DK] \begin{bmatrix} pI - A + BK & -BK \\ 0 & pI - A + LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B\alpha \\ 0 \end{bmatrix}.$$

* Détermination du gain de l'observateur :

Il s'agit de déterminer L soit directement, soit par la formule de Bass et Gura qui permet la construction d'un algorithme.

Le gain de l'observateur est fixé d'après le choix des valeurs propres de la matrice A-LC :

$$\det(pI - A + LC) = \det(pI - A^T + C^T L^T),$$

On note :

$$a(p) = \det(pI - A) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i \text{ et } \hat{a}(p) \text{ le polynôme représentant les}$$

dynamiques désirées pour l'observateur :

$$\hat{a}(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i p^i,$$

Où les λ_i sont les valeurs propres désirées pour A-LC.

Cas mono sortie (L = 1).

Calcul direct :

$$\det(pI - A + LC) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(l_1, \dots, l_n) p^i,$$

Où les $f_i(l_1, \dots, l_n)$ sont n formes linéaires en les inconnues l_1, \dots, l_n , c'est à dire que l'on peut écrire, pour $i = 0, \dots, n-1$, $f_i(l_1, \dots, l_n) = F_i L$. Les n égalités :

$$i = 0, \dots, n-1, f_i(l_1, \dots, l_n) = \hat{a}_i,$$

Conduisent à : $FL = \hat{a}$,

Où :

$$F = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

On obtient donc le gain par :

$$L = F^{-1} \hat{a}.$$

Remarques sur les observateurs :

Quel que soit le type d'observateur choisi, le principe de séparation énoncé dans le cas continu, reste valable : commande par retour d'état et observateur peuvent être déterminés séparément.

Comme dans le cas continu, deux approches existent pour le choix du gain du reconstruteur d'état, l'une basée sur la notion de placement de pôles, l'autre basée sur la minimisation d'un critère quadratique associé.

Dans le cas des systèmes discrets, il existe un choix particulièrement intéressant, qui consiste à déterminer L tel que la matrice $A - LC$ soit nilpotente, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres soient nulles. En effet, dans ce cas on obtient un observateur à réponse pile où l'erreur est exactement nulle au bout de $\max\{v_i\}$ pas où les v_i sont les indices d'observabilité.

Notons la différence avec un observateur asymptotique où l'erreur tend vers 0.

- Exemple de synthèse de régulateur.
- Commande linéaire quadratique à temps continu:

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR (pour Linear Quadratic Regulator).

Le système est linéaire et la commande est quadratique.

La commande optimale est un retour d'état.

On considère un système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(0) = x_0$$

où les matrices A , B sont respectivement de dimension $(n \times n)$ et $(n \times m)$,

$$x \in R^n, u \in R^m$$

et le critère quadratique à horizon fini :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

où

R est une matrice symétrique définie positive de dimension $(m \times m)$,

$Q = C_q^T C_q$ est une matrice symétrique semi-définie positive de dimension $(n \times n)$.

Les matrices Q et R ont un rôle de pondération sur l'état et la commande.

L'objectif est la détermination de la commande par retour d'état $u(t)$ (qui assure la stabilité du système tout en modérant la dépense d'énergie), en minimisant le critère de performance J .

La méthode :

Par application directe du principe du minimum, l'Hamiltonien s'écrit :

$$H(\lambda, x, u) = \lambda^T (Ax + Bu) + \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u)$$

et le système Hamiltonien comme :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + Bu$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda - Qx$$

$$\text{avec } \lambda_0 = 1$$

La condition de minimum H par rapport à la commande u s'exprime par :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u = -R^{-1} B^T \lambda$$

Le système hamiltonien devient linéaire :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax - BR^{-1} B^T \lambda$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda - Qx$$

avec les conditions initiales et finales : $x(0) = x_0$ et $\lambda(T) = 0$ (conditions de transversalité).

La solution est unique (système linéaire).

λ s'écrit sous la forme : $\lambda(t) = P(t)x(t)$ avec $P(t)$ une matrice symétrique, alors :

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x}$$

A l'aide du système hamiltonien, on parvient à :

$$-A^T Px - Qx = \dot{P}x + PAx - PBR^{-1} B^T Px$$

Et comme la relation est vraie $\forall x$, on obtient l'équation de Riccati différentielle :

$$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q$$

la condition de transversalité à l'instant final donne $P(T) = 0$.

alors :

- si le couple (A, B) est stabilisable,
- et le couple (C_q, A) est détectable,

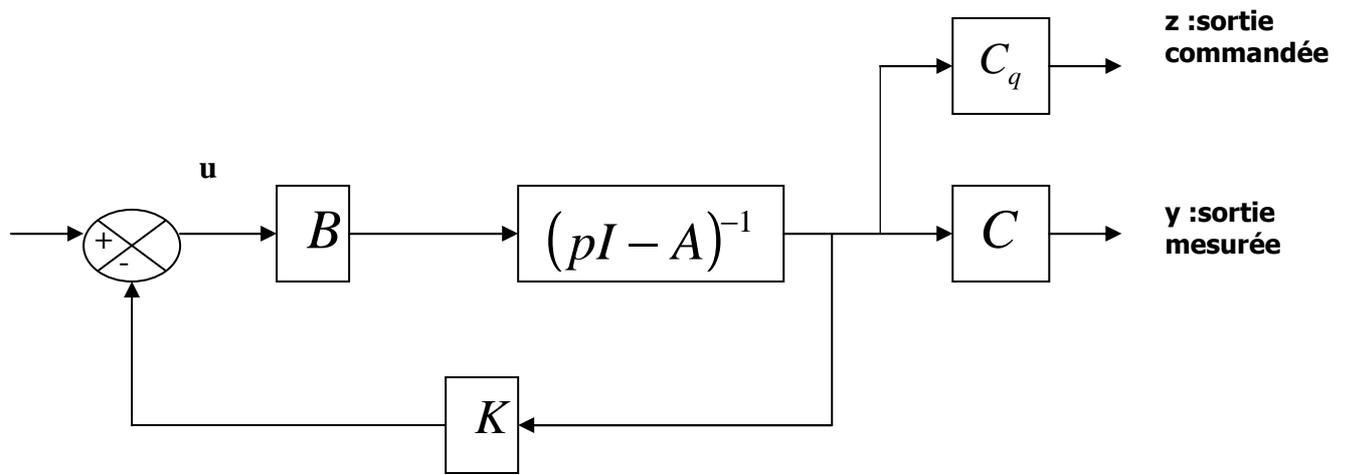
la résolution de cette équation fournit alors la commande par retour d'état :

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^T P(t)x(t).$$

où $P(t)$ est une matrice solution de l'équation de Riccati différentielle.

Choix des pondérations :

Q et R représentent des poids sur les états et la commande respectivement. Ils sont les paramètres les plus importants dans le problème LQR et leur détermination n'est pas évidente, d'où la nécessité d'un grand nombre d'itération pour aboutir à un système stable avec une bonne précision.



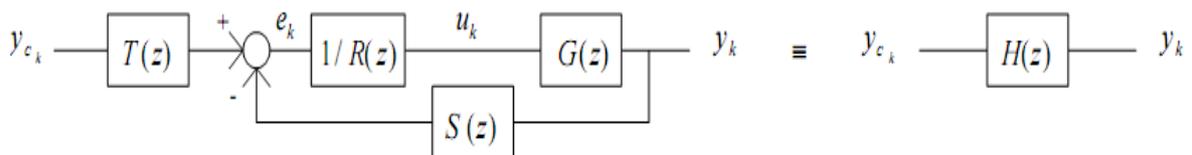
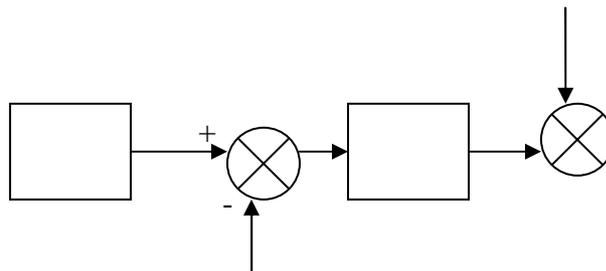
Problème LQR (formulation continue).

Chapitre 2.

Synthèse par placement de pôles.
Structure RST.

Ces correcteurs permettent de réaliser un asservissement d'un processus possédant des zéros instables. La structure est plus complexe, néanmoins ces régulateurs sont plus souples. Le calcul de ces correcteurs peut se faire automatiquement par un logiciel.

Le régulateur RST est fondé sur une décomposition suivant trois polynômes conduisant à la structure de commande :



Structure de commande RST.

La synthèse du correcteur consiste à découpler les comportements dynamiques vis-à-vis de la consigne et des perturbations éventuelles. Elle s'effectue ici par approche de type placement de pôles ; les critères ont pour objectif d'obtenir des fonctions de transfert en boucle fermée (suivant le modèle) permettant de satisfaire un cahier de charges vis-à-vis de la consigne et des perturbations.

$$\text{Le modèle à atteindre : } G_m(p) = \frac{B_m(p)}{A_m(p)}$$

D'après la structure RST de ce régulateur, la fonction de transfert en boucle fermée vérifie :

$$F(p) = \frac{T(p)B(p)}{A(p)R(p) + B(p)S(p)}$$

Calculer le régulateur c'est établir les polynômes $R(p)$, $S(p)$, $T(p)$ en fonction des polynômes $A(p)$, $B(p)$, $A_m(p)$ et $B_m(p)$.

La loi de commande est issue de la structure de l'asservissement :

$$R(p)U(p) = T(p)Y_c(p) - S(p)Y(p)$$

$$G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} ; \text{ Le numérateur } B(p) \text{ donne les zéros du processus.}$$

$B(p)$ contient les zéros stables et instables. Ce polynôme peut donc se scinder en deux parties :

$$B_S(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

Et l'autre contenant les zéros instables :

$$B_i(p) = K(p - p_0)(p - p_1) \dots$$

On peut ainsi inclure dans cette dernière partie les zéros dont la norme est proche de 1

$$\Rightarrow B(p) = B_i(p) \cdot B_S(p)$$

Si on rapproche $F(p)$ de $G(p)$, il paraît assez naturel de penser que $F(p)$ ne pourra jamais compenser les retards intrinsèques à $G(p)$ et qui sont manifestés par la différence des degrés des polynômes $B(p)$ et $A(p)$. Le modèle $F(p)$ doit tenir compte de ce fait et on doit avoir :

$$\text{deg ré}(A_m(p)) - \text{deg ré}(B_m(p)) \geq \text{deg ré}(A(p)) - \text{deg ré}(B(p))$$

Comme $B_i(p)$ constitue une partie non compensée de $B(p)$, on doit le retrouver dans $B_m(p)$:

$$B_m(p) = B_i(p)B'_m(p).$$

Le polynôme $R(p)$ intervient au dénominateur dans la boucle de régulation. Son degré doit être suffisant pour assurer la causalité du correcteur. Les polynômes $S(p)$ et $T(p)$ sont de degré au plus égal à celui de $R(p)$.

- $R(p)$ compense les zéros compensables du processus, contenus dans $B_s(p)$. Il assure en outre la présence des intégrations nécessaires pour assurer la précision. On a donc :

$$R(p) =$$

$$R(z) = (z-1)^i B_s(z)R'(z).$$

$R'(z)$ est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

- Le polynôme $T(z)$ assure le couplage du système à son entrée de commande, il fournit donc les zéros nécessaires pour obtenir le numérateur du modèle $B_m(z)$ dont une partie est déjà fournie par la partie non compensable du processus. On choisit donc :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z)$$

Le degré de $A_0(z)$ n'est pas arbitraire. Il permet la synthèse de $R(z)$ et $T(z)$. On doit avoir :

$$\text{degré}(A_0(z)) \geq 2 \text{ degré}(A(z)) - \text{degré}(A_m(z)) - \text{degré}(B_s(z)) + i - 1.$$

- Le polynôme $S(z)$, tout comme $R(z)$, est solution d'une équation polynomiale dans laquelle on a remplacé les polynômes :

$$B(z) \text{ par } B_i(z)B_s(z)$$

$$B_m(z) \text{ par } B_i(z)B'_m(z)$$

$$R(z) \text{ par } (z-1)^i B_s(z)R'(z)$$

$$T(z) \text{ par } B'_m(z)A_0(z)$$

Il vient :

$$\frac{B'_m(z)A_0(z)B_i(z)B_s(z)}{(z-1)^i A(z)B_s(z)R'(z) + B_i(z)B_s(z)S(z)} = \frac{B_i(z)B'_m(z)}{A_m(z)}$$

Après simplifications $R'(z)$ et $S(z)$ doivent vérifier :

$$(z-1)^i A(z)R'(z) + B_i(z)S(z) = A_0(z)A_m(z)$$

Équation polynomiale (équation Diophantine) connue sous d'identité de Bézout admet une solution unique pour $R'(z)$ et $S(z)$, si leurs degrés sont convenables :

$$\text{degré}(S(z)) < \text{degré}(A(z)) + i$$

$$\text{degré}(R'(z)) = \text{degré}(A_0(z)) + \text{degré}(A_m(z)) - \text{degré}(A(z)) - i.$$

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

$$R(p) = r_n p^n + r_{n-1} p^{n-1} + \dots + r_1 p + r_0$$

$$S(p) = s_n p^n + s_{n-1} p^{n-1} + \dots + s_1 p + s_0$$

$$T(p) = t_n p^n + t_{n-1} p^{n-1} + \dots + t_1 p + t_0$$