

Epreuve : Méthodes Numériques

Durée : 1 heure

N.B : Tous les résultats doivent être donnés avec 4 chiffres après la virgule

Exercice 1 (5 pts)

Calculer par la méthode de Newton, la racine de l'équation $x = \cos(x)$, prendre comme initiale $x_0 = 1$

Exercice 2 (4 pts)

Déterminer par la méthode de Newton, le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x)$ donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	3	7

Donner une valeur approchée de $f'(0)$

Exercice 3 (4 pts)

En découpant l'intervalle $[0, 2]$ en deux segments égaux ($n = 2$), Calculer par la méthodes des trapèzes puis Simpson :

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

Exercice 4 (3 pts)

Résoudre par la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (4 pts)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) - y^2 e^{-t} - 1 = 0, & \text{avec } t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En utilisant un pas $h = 1$, calculer à l'aide du schéma explicite d'Euler $y(1)$.

Solution : Méthodes Numériques

Exercice 1 (5 pts)

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)} \end{cases} \quad (2 \text{ pts})$$

C. A: 4 chiffres après virgule

$$x_1 = 0.7504, \quad x_2 = 0.7391, \quad x_3 = 0.9391$$

$$r = 0.9391 \quad (3 \text{ pts})$$

Exercice 2 (4 pts)

x_i	$f(x_i)$		
0	1	2	1
1	3	4	
2	7		

$$P(x) = 1 + 2x + x(x - 1) = x^2 + x + 1 \quad (3 \text{ pts})$$

$$f'(0) \approx P'(0) = 1 \quad (1 \text{ pts})$$

Exercice 3 (4 pts)

$$I_{\text{trapèze}} = \frac{h}{2} (e^{-x_0^2} + e^{-x_2^2} + 2e^{-x_1^2}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-4} + 2e^{-1}) = 0.8770 \quad (2 \text{ pts})$$

$$I_{\text{simpon}} = \frac{h}{3} (e^{-x_0^2} + e^{-x_2^2} + 4e^{-x_1^2}) = \frac{1}{3} (1 + e^{-4} + 4e^{-1}) = 0.8299 \quad (2 \text{ pts})$$

Exercice 4 (3 pts)

$$L_2 = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = (4 \ 1 \ 6) - \frac{4}{2} (2 \ 1 \ 4) = (0 \ -1 \ -2) \quad (1 \text{ pts})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad (1 \text{ pts})$$

Exercice 5 (4 pts)

$$\begin{cases} y'(t) = y^2 e^{-t} + 1 = f(t, y), \text{ avec } t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1 \text{ pts})$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) = y_n + h(y_n^2 e^{-t_n} + 1) \end{cases} \quad (1 \text{ pts})$$

$$y(1) = y_1 = y_0 + h(y_0^2 e^{-t_0} + 1) = 3 \quad (2 \text{ pts})$$