Correction Exame HS411 S IV.
2020/21

Question de Cours: (6pt) $Q = f(\Delta H)$

Nous appliquons le théorème de Bernoulli:

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1 = \frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \quad (1) \quad // \; z_1 = z_2$$

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g} \quad (1) \quad Q = S_1 V_1 = S_2 V_2$$

$$\frac{P_2-P_1}{\rho g} = \frac{V_1^2-V_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_2-P_1}{\rho g} = \frac{\frac{Q^2}{S_1^2}-\frac{Q^2}{S_2^2}}{2g} \quad (1)$$

$$\frac{Q^2(S_2^2-S_1^2)}{S_1^2 \cdot S_2^2 \cdot 2g} = \frac{\rho g \Delta H}{\rho g} \quad (1)$$

Ce qui donne: $Q = \left(\frac{2g\Delta H\, S_1^2 \cdot S_2^2}{S_2^2 - S_1^2}\right)^{1/2}$ (2)

Exercice:

1) Calcul du débit de l'installation:

Nous appliquons le théorème de Bernoulli entre (1) et (5):

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1 = \frac{P_5}{\rho g}+\frac{V_5^2}{2g}+z_5 . \quad (1)$$

$P_1 = P_5 = P_{at}$ et $V_1 \lll V_5$.

donc:

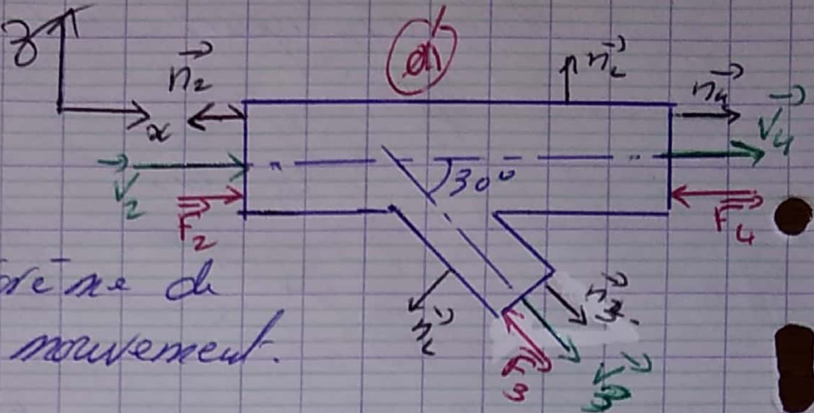
$$\frac{V_5^2}{2g} = z_1 - z_2 \Rightarrow V_5 = \sqrt{2g(z_1 - z_5)} \quad (0{,}5)$$

A.N.: $V_5 = (20(36-24))^{1/2} = 15{,}5 \; m/s$. (0,5)

$$Q = \frac{3\times V_5 \cdot S_5}{2} = \frac{3}{2}\, 15{,}5 \times \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} =$$ 1

$$Q = 0{,}046\ m^3/s \approx 46\ l/s$$

Calcul de l'action de l'eau sur le Té



0,1 $S = S_2 + S_3 + S_4 + S_L$

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement.

$$\iint_S \rho \vec V(\vec V\cdot \vec n_{ext})\,ds = \sum \vec F_{ext}$$ 0,1

$$\iint_{S_2}\rho\vec V_2 \underbrace{(\vec V_2\cdot\vec n_2)}_{-V_2}ds + \iint_{S_3}\rho\vec V_3\underbrace{(\vec V_3\cdot\vec n_3)}_{V_3}ds + \iint_{S_4}\rho\vec V_4\underbrace{(\vec V_4\cdot\vec n_4)}_{V_4}ds + \iint_{S_L}\rho\vec V_L\underbrace{(\vec V_L\cdot\vec n_L)}_{0}ds =$$

$$\underbrace{\iiint_\tau \rho\vec g\,d\tau}_{M\vec g} + \underbrace{\iint_{S_2}\vec T_2\, dS}_{\vec F_2} + \underbrace{\iint_{S_3}\vec T_3\, dS}_{\vec F_3} + \underbrace{\iint_{S_4}\vec T_4\, dS}_{\vec F_4} + \underbrace{\iint_{S_L}\vec T_L\, dS}_{-\vec R}$$ 0,1

$$-\rho\vec V_2 V_2 \cdot S_2 + \rho \vec V_3 V_3 S_3 + \rho\vec V_4 V_4 \cdot S_4 = M\vec g + \vec F_2+\vec F_3+\vec F_4-\vec R$$

En négligeant le poids devant les autres forces, Nous avons:

$$-\rho Q_2\vec V_2 + \rho Q_3\vec V_3 + \rho Q_4 \vec V_4 = \vec F_2+\vec F_3+\vec F_4-\vec R$$ 0,1

Sachant que $Q_2 = Q$; $Q_3 = \frac{1}{3} Q$; $Q_4=\frac{2}{3} Q$

$$\Rightarrow -\rho Q\vec V_2 + \frac{1}{3}\rho Q\vec V_3 + \frac{2}{3} \rho Q\vec V_4 = \vec F_2+\vec F_3+\vec F_4-\vec R$$ 0,1

Projection sur l'axe (Ox):

$$-\rho Q V_2 + \frac{1}{3} Q V_3 \cos 30 + \frac{2}{3} \rho Q V_4 = F_2 - F_3 \cos 30 - F_4 - R$$

$$R_x = F_2 - F_3 \cos 30 - F_4 - \rho Q \left(-V_2 + \frac{1}{3} V_3 \cos 30 + \frac{2}{3} V_4\right)$$ (1)

Projection sur l'axe (Oz) :

$$-\rho Q_3 V_3 \sin 30 = -F_3 \sin 30 - R_z$$

$$R_3 = \rho \frac{1}{3} Q V_3 \sin 30 - F_3 \sin 30$$

$$\Rightarrow R_3 = \frac{1}{2}\left(\rho Q \frac{V_3}{3}\right) - \frac{1}{2} F_3$$ (1)

Applications Numériques

$$S_2 = S_4 = \frac{\pi . D_2^2}{4} = \frac{\pi . 0{,}1^2}{4} = 0{,}0079 \ m^2$$

$$S_3 = \frac{\pi . D_3^2}{4} = \frac{\pi . 0{,}05^2}{4} = 0{,}0020 \ m^2$$

Calcul des pressions P_2 et P_3 : (0,5)

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$ Sachant que : $P_1 = P_{at}$ et $V_1 <<< V_2$.

$$\frac{P_2 - P_{at}}{\rho g} = z_1 - z_2 - \frac{V_2^2}{2g}$$, $V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{0{,}046}{0{,}0079} = 5{,}8 \ m/s$ (0,5)

$V_3 = \frac{1 Q}{3 . S_3} = 7{,}8 \ m/s$ (0,5)

$V_4 = \frac{2 Q}{3 S_4}$ (0,5)

$V_4 = 3{,}9 \ m/s$

$$\frac{P_2 - P_{at}}{\rho g} = 12 - \frac{5{,}8^2}{20} = 10{,}318 \ mce$$ (0,5)

$$\frac{P_3 - P_{at}}{\rho g} = \frac{P_2 - P_{at}}{\rho g} - 1 = 10{,}318 - 1 = 9{,}318 \ mce$$ (0,5)

$$\frac{P_4 - P_{at}}{\rho g} = \frac{P_3 - P_{at}}{\rho g} = 9{,}318 \ m.c.e.$$

$$F_2 = (P_2 - P_{at}) . S_2 = 10{,}318 \times 10000 \times 0{,}0079$$

$F_2 = 815 \ N$ (0,5)

$F_3 = (P_3 - P_{at}) . S_3 = 9,318 \times 10^4 \times 0,0020 = 186 N$

$F_3 = 186 N$ 0,1

$F_4 = (P_4 - P_{at}) . S_4 = 9,318 \times 10^4 \times ,0079 = 736 N$

$F_4 = 736 N$ 0,1

$R_x = 815 - \frac{\sqrt{3}}{2} . 186 - 736 - 46 (-5,8 + \frac{\sqrt{3}}{6} 7,8 + \frac{2}{3} 3,9)$

$R_x = -38,5 N.$ 0,1

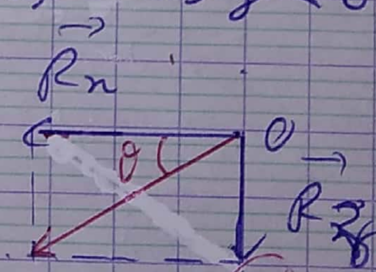
$R_z = 59,8 - 93 = -33,2 N$ 0,1

$\|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = 58,83 N.$ 0,1

$tg\,\theta = \frac{R_z}{R_x} \Rightarrow \theta = 40,77°$ 0,1

Action de $\vec{R}$ telle que :

$\|\vec{R}\| = 58,83 N$, direction 40,77° par rapport à l'horizontal sens des $x < 0$, et des $z < 0$



0,1