Examen final 2020 - 2021

Exercice 01:

1) Méthode de Newton (différences finies).

x	$f(x)$		
0	1		
1	0.904837	-0.095163	
2	0.818731	-0.086106	0.009057

$$P(x) = 1 - \frac{0,095163}{1!\ 1^1}x + \frac{0.009057}{2!\ 1^2}x(x-1)$$

$$= 0,0045285\, x^2 - 0,099695\, x + 1.$$

2) $$|E| \leqslant \frac{\sup_{[0,2]} |f'''(x)|}{3!} \sup_{[0,2]} \left|\prod (x - x_i)\right|$$

On a : $f(x) = e^{-\frac{x}{10}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{10} e^{-\frac{x}{10}} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{10}} \Rightarrow f'''(x) = \frac{-1}{1000} e^{-\frac{x}{10}}$

$$\Rightarrow \sup_{[0,2]} |f'''(x)| = \frac{1}{1000}.$$

On a aussi $\prod_{i=1}^{3}(x - x_i) = x(x-1)(x-2)$ avec $\sup_{[0,2]}\left|\prod_{i=1}^{3}(x-x_i)\right| \leqslant 0.4$

Donc $|E| \leqslant \frac{1}{1000 \times 3!} \cdot 0,4 = 0,000066.$

3) On choisit la méthode de Trapèze car n est impair.

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum f(x_i)\right] = 2.593974$$

4) $$|E_T| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\ n^2} \sup_{[0,3]} |f''(x)| \leqslant \frac{3^3}{12\ n^2} \cdot \frac{1}{100}$$

on veut : $\frac{3^3}{12 n^2 \times 100} \leqslant 10^{-3}$ donc $n \geqslant \sqrt{\frac{3^3 \times 10^3}{12 \times 100}} \simeq 4,74$

on prend $\boxed{n = 5}$

Exercice 02 :

1) On a $\cancel{f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-x=0}$ ~~ou bien~~ $f(x)=x(1+e^x)-e^x=0$.

f est continue sur $[0,1]$

$f(0)=-1<0$ et $f(1)=+1>0$

$f'(x)=\cancel{\frac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2}-1=\frac{e^x-(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2}=-\frac{(e^{2x}+e^x+1)}{(1+e^x)^2}}\ 1+xe^x>$

donc f est croissante sur $[0,1]$.

D'après TVI, il existe une racine unique de $f(x)=0$ sur $[0,1]$.

2) On a $f(x)=0 \Longleftrightarrow g(x)=x$ avec $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

$g'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, c'est une fonction décroissante avec :

$g'(0)=\frac{1}{4}=0{,}25$ et $g'(1)\cong 0{,}19$. D'où $\sup\limits_{[0,1]}|g'(x)|\leq 0{,}25<1$

Donc la méthode de point fixe converge vers la solution pour $g(x)$ donnée.

3) Pour N-R on a :

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$=x_k-\frac{x_k(1+e^{x_k})-e^{x_k}}{1+x_k e^{x_k}}=\frac{x_k^2-x_k+1}{x_k+e^{-x_k}}$$

on veut une condition initiale x_0 telle que $f(x_0)\,f''(x_0)>0$

on a $f(x)=x(1+e^x)-e^x$ et $f''(x)=(x+1)e^x$ donc on choisit

par exemple $x_0=1$.

Exercice 03:

On a
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 10 & 13 \\ 9 & 22 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Donc
$$A^0 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 0 \\ 6 & 10 & 13 & -9 \\ 9 & 22 & 36 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 4 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où
$$\begin{cases} -x_3 = -1 \\ -2x_2 - 5x_3 = -9 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = -7 \end{cases}$$

Donc $x = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$