Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Département de Génie mècanique
09 juin 2021

Niveau: L2/S2/Math4
Durée: 1 heure

Examen Final.

Exercice 1 (6 pts)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et soit la fonction

$$f(z) = z^2 - 2z.$$

1) Ecrire la fonction f sous la forme $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

2) Montrer que la fonction f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (6 pts)

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$$I = \int_{\gamma_1} \bar{z} dz, \qquad J = \int_{\gamma_2} \bar{z} dz, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

où

1. γ_1 : le quart-de-cercle de centre 0 et de rayon 2 ($\gamma_1(t) = 2e^{it} \;\; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).
2. γ_2 : le segment de droite joignant les points $(0, 0)$ et $(2, 1)$ ($\gamma_2(t) = (2 + i)t \;\; 0 \leq t \leq 1$).

Exercice 3 (8pts)

Soient les séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} (n(n-1) + 3) z^n$.
2. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n+4}{n!} z^n$.

A) Déterminer leur rayon de convergence.

B) Calculer leur somme.

Solution

Exercice 1 (6Pts)

Soit $f(z) = z^2 - 2z$

1) On pose $z = x + iy$, alors

$$z^2 - 2z = x^2 - y^2 - 2x + i(2xy - 2y). \qquad \text{(1pt)}$$

Ainsi

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

avec

$$\begin{cases} u(x,y) = & x^2 - y^2 - 2x, & \text{(0.5pt)} \\ v(x,y) = & 2xy - 2y. & \text{(0.5pt)} \end{cases}$$

2) Montrons que f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$, alors on vérifie les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \text{(1pt)}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2, \qquad \text{(1pt)}$$

Ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{(1.5pts)}$$

Donc, la fonction f est holomorphe (analytique) (0.5pt).

Exercice 2 (6Pts)

Posons

$$f(z) = \bar{z}.$$

1)$I = \int_{\gamma_1} f(z)dz$,

avec

$$\gamma_1(t) = 2e^{it} \;\; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$f(\gamma_1) = 2e^{-it}, \qquad \text{(0.5pt)}$$

$$\gamma_1'(t) = 2ie^{it}, \qquad \text{(0.5pt).}$$

Ainsi

$$I = \int_{\gamma_1} \bar{z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-it} \times 2ie^{it}dt = 2\pi i. \qquad \text{(2pts)}$$

2)$J = \int_{\gamma_2} f(z)dz$,

avec

$$\gamma_2(t) = (2 + i)t \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

$$f(\gamma_2) = (2 - i)t, \qquad \text{(0.5pt)}$$

$$\gamma_2'(t) = 2 + i, \qquad \text{(0.5pt).}$$

Ainsi

$$I = \int_{\gamma_1} \bar{z} dz = \int_0^1 (2-i)t \times (2+i) dt = \frac{5}{2}. \qquad \text{(2pts)}$$

Exercice 3 (8Pts)

A) Détermination du rayon de convergence

1. $\sum_{n\geq 0} (n(n-1)+3) z^n$.
   Posons $a_n = n(n-1)+3$. On applique la règle d'Alembert, nous avons
   $$l_1 = \lim_{n\to+\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)+3}{n(n-1)+3} = 1, \qquad \text{(1.25pts)}$$
   Ainsi
   $$R_1 = \frac{1}{l_1} = 1. \qquad \text{(0.75pt)}$$

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n+4}{n!} z^n$.
   $$b_n = \frac{n+4}{n!}$$
   On applique la règle d'Alembert
   $$l_2 = \lim_{n\to+\infty} \mid \frac{b_{n+1}}{b_n} \mid = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+5)}{(n+1)!(n+4)} = 0, \qquad \text{(1.25pts)}$$
   Ainsi
   $$R_2 = \frac{1}{l_2} = +\infty. \qquad \text{(0.75pt)}$$

B) Calcul de somme

1. $$S_1(z) = \sum_{n\geq 0} (n(n-1)+3) z^n = \frac{5z^2 - 6z + 3}{(1-z)^3}. \qquad \text{(2pts)}$$

2. $$S_2(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+4}{n!}\right) z^n = \exp(z)(z+4). \qquad \text{(2pts)}$$