

(14)

Exercice obligatoire: Soit la tabulation de la fonction f ,

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 1,5$	$x_2 = 2$	$x_3 = 2,5$
$f(x_i)$	0	0,4055	0,6931	0,9163

1- Donner le polynôme d'interpolation de Newton $P_2(x)$ de degré 2, passant par x_0, x_1, x_2 , puis obtenir l'erreur $E_2(x)$.

2- Appliquer la méthode de trapèze pour approximer l'intégrale

$$I(P_2) = \int_1^{2,5} P_2(x) dx \quad (n=3)$$

3- Estimer l'erreur d'intégration de $I(P_2)$.

Choisissez un seul exercice : اختر تمرين واحد فقط :

(06)

Exercice 01 Donner l'approximation de la fonction :

$$h(x) = e^{-x} \sqrt{1-x^2} \quad , x \in [-1, 1]$$

par les deux premiers polynômes de tchebychev.

(06)

Exercice 02 Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - t^2 y = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Calculer $y(0,25)$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $h = 0,25$

(06)

Exercice 03 On considère la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x} - x$

1- Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution réelle unique α sur l'intervalle $[0, 1]$.

2- Montrer que la méthode de Newton suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$$

converge vers la solution α

Exercice obligatoire: Soit la tabulation de la fonction

x_i	$x_0=1$	$x_1=1.5$	$x_2=2$	$x_3=2.5$
$f(x_i)$	0	0,4055	0,6931	0,9163

1- Donner le polynôme d'interpolation de Newton $P_2(x)$ de degré 2, passant par x_0, x_1, x_2 , puis obtenir l'erreur $E_2(x)$.

2- Appliquer la méthode de trapèze pour approximer l'intégrale

$$I(P_2) = \int_1^{2.5} P_2(x) dx \quad (n=3)$$

3- Estimer l'erreur d'intégration de $I(P_2)$.

1- Donner le polynôme d'interpolation de Newton $P_2(x)$ de degré 2, passant par x_0, x_1, x_2

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3
1	0			
1,5	0,4055	$\frac{0,4055 - 0}{1,5 - 1} = 0,811$		
2	0,6931	$\frac{0,6931 - 0,4055}{2 - 1,5} = 0,5752$	$\frac{0,5752 - 0,811}{2 - 1} = -0,2358$	
2,5	0,9163	$\frac{0,9163 - 0,6931}{2,5 - 2} = 0,4464$	$\frac{0,4464 - 0,5752}{2,5 - 1,5} = -0,1288$	$\frac{-0,1288 + 0,2358}{2,5 - 1} = 0,07133$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \quad (0,5)$$

$$P_2(x) = 0,811(x-1) - 0,2358(x-1)(x-1,5)$$

$$P_2(x) = -0,2358x^2 + 1,4005x - 1,1647 \quad (2)$$

l'erreur $E_2(x)$. En appliquant la relation suivante

$$E_n(x) = \left[\prod_{i=0}^n (x-x_i) \right] f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

on trouve :

$$E_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \quad (1)$$

$$E_2(x) = 0,07133(x-1)(x-1,5)(x-2)$$

$$E_2(x) = 0,07133x^3 - 0,320995x^2 + 0,463645x - 0,21399 \quad (2)$$

2- Appliquer la méthode de trapèze pour approximer l'intégrale

$$I(P_2) = \int_1^{2.5} P_2(x) dx \quad (n=3)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \tilde{I}(f)$$

$$h = \frac{2,5 - 1}{3} = 0,5 \quad (0,5)$$

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = \frac{h}{2} [f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

$$\tilde{I}(P_2) = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_3) + 2(f(x_1) + f(x_2))] \quad (0,5)$$

$$= \frac{0,5}{2} [0 + 0,9163 + 2(0,6931 + 0,4055)] \quad (1)$$

$$\tilde{I}(P_2) = 0,778375 \quad (1)$$

Trapezoid method:

integration error:

$$E(f) = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)] \right|$$

$$= \left| -\frac{(b-a)^3}{12} \frac{f''(c)}{n^2} \right| \quad ; \quad c \in [a, b]$$

$$= \left| -\frac{(b-a)^3}{12} \frac{f''(c)}{n^2} \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

$$\text{ou} \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

3- Estimer l'erreur d'intégration de $I(P_2)$.

$$E(P_2) \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2} \quad (0,5)$$

$$M_2 = \max_{x \in [1, 2,5]} |P_2''(x)| \quad (0,5)$$

$$P_2(x) = -0,2358x^2 + 1,4005x - 1,1647$$

$$P_2'(x) = -0,4716x + 1,4005 \quad (0,5)$$

$$P_2''(x) = -0,4716 \quad (0,5)$$

$$E(P_2) \leq 0,4716 \cdot \frac{(1,5)^3}{12 \cdot 9} \quad (0,5)$$

$$E(P_2) \leq 0,0147 \quad (1)$$

Exercice 03 On considère la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x} - x$

1- Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution réelle unique α sur l'intervalle $[0, 1]$.

2- Montrer que la méthode de Newton suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$$

converge vers la solution α

$$g(x) = e^{-x} - x$$

1) g continue sur $[0, 1]$ (0,5)

$$g(0) \cdot g(1) < 0 \quad (0,5)$$

la monotonie de g : $g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(\overbrace{e^{-x} + 1}^{>0}) < 0$ (0,25)

donc g est strictement décroissante sur $[0, 1]$ (0,25)

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^{-x} - x = 0$ possède une solution réelle unique α sur $[0, 1]$. (0,25)

2) En appliquant le théorème de convergence de cette méthode :

- $g(0) \cdot g(1) < 0$
- $\forall x \in [0, 1], g'(x) = -e^{-x} - 1 \neq 0$ (1)
- $\forall x \in [0, 1], g''(x) = e^{-x} \neq 0$ (1)
- $g(0) \cdot g'(0) > 0$ (1)

donc la suite $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$ (1)

converge vers la solution α .

La méthode de Newton:

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ tels que:

- 1) $f(a) \cdot f(b) < 0$
- 2) $\forall x \in [a, b], f'(x) \neq 0$
- 3) $\forall x \in [a, b], f''(x) \neq 0$

alors l'équation $f(x) = 0$ possède une seule racine dans $[a, b]$, et $\forall x_0 \in [a, b]$ la suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \in [a, b] \end{cases}$ converge quadratiquement.

Remarque: une bonne approximation initiale x_0 est celle qui vérifie l'inégalité suivante:

$$f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$$

Exercice 02

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - t^2 y = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Calculer $y(0,25)$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $h = 0,25$

$$\begin{cases} y' = t^2 y + t^2 = t^2 (y+1) \\ y(0) = 2 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 ; t \in [t_0, T] \end{cases}$$

Méthode de Runge-Kutta :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (C_1 + 2(C_2 + C_3) + C_4)$$

$$C_1 = f(t_i, y_i)$$

$$C_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} C_1\right)$$

$$C_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} C_2\right)$$

$$C_4 = f(t_i + h, y_i + h C_3)$$

$$t_i = t_0 + ih$$

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = 0,25$$

$$t_2 = 0,5$$

$$y_0 = 2$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} [C_1 + 2(C_2 + C_3) + C_4] \quad 0,5$$

$$① C_1 = f(t_0, y_0) = t_0^2 (y_0 + 1) = 0$$

$$① C_2 = f\left(t_0 + \frac{0,25}{2}, y_0 + \frac{0,25}{2} C_1\right) = f(0,125, 2) = (0,125)^2 (2+1) = 0,046875$$

$$① C_3 = f\left(t_0 + \frac{0,25}{2}, y_0 + \frac{0,25}{2} C_2\right) = f(0,125, 2,005859) = 0,04724121$$

$$① C_4 = f(t_0 + 0,25, y_0 + 0,25 C_3) = f(0,25, 2,03125) = 0,18823814$$

$$y_1 = 2 + 0,04166 [0 + 2(0,046875 + 0,04724121) + 0,18823814]$$

$$y_1 = 2,015684$$

$$y(0,25) = y_1 = 2,015684$$

①

Exercice 01 Donner l'approximation de la fonction :

$$h(x) = e^{-x} \sqrt{1-x^2} \quad ; x \in [-1, 1]$$

par les deux premiers polynômes de tchebychev.

Les 2 premiers polynômes de tchebychev.

$$T_0(x) = 1 \quad (0,25); \quad T_1(x) = x \quad (0,25)$$

L'approximation s'écrit sous la forme :

$$h(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) \quad (0,24)$$

où :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot h(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (e^{-x} \sqrt{1-x^2}) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{-x} dx = \frac{[-e^{-x}]_{-1}^1}{\pi} = \frac{e - e^{-1}}{3,1415} \quad (2)$$

$$a_0 = 0,74815$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} h(x) T_1(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (e^{-x} \sqrt{1-x^2}) \cdot x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x e^{-x} dx \quad \left\langle \begin{array}{l} U = x \\ V' = e^{-x} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} U' = 1 \\ V = -e^{-x} \end{array} \right\rangle$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[[-x e^{-x}]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x} dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-e^{-1} - e + [-e^{-x}]_{-1}^1 \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-e^{-1} - e + e^{-1} - e^{-1} \right] = \frac{-4e^{-1}}{\pi} = -0,46840$$

$$a_1 = -0,46840$$

$$H(x) = 0,74815 - 0,46840 x$$

(1,25)

Polynômes de Tchebychev:

$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ ou $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$, $x \in [-1, 1]$

$T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$

$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x)$

$T_0(x) = 1$	$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_1(x) = x$	$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	

$f(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots + a_n T_n(x)$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx$

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_n(x) dx$; $n \neq 0$