Nom et prénom: **الاسم و اللقب:**

(14) **Exercice obligatoire:** Soit la tabulation de la fonction f :

x_i	$x_0=1$	$x_1=1,5$	$x_2=2$	$x_3=2,5$
$f(x_i)$	0	0,4055	0,6931	0,9163

1- Donner le polynôme d'interpolaion de Newton $P_2(x)$ de degrée 2 , passant par x_0, x_1, x_2 , puis obtenir l'erreur $E_2(x)$.

2- Appliquer la méthode de trapèze pour approximer l'intégrale

$$I(P_2) = \int_1^{2,5} P_2(x)\,dx \qquad (n=3)$$

3- Estimer l'erreur d'intégration de $I(P_2)$.

Choisissez un seul exercice : **اختر تمرين واحد فقط :**

(06) **Exercice 01** Donner l'approximation de la fonction :

$$h(x) = e^{-x}\sqrt{(1-x^2)} \quad ; x \in [-1, 1]$$

par les deux premiers polynômes de tchebychev.

(06) **Exercice 02** Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - t^2 y = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Calculer $y(0,25)$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $h = 0,25$

(06) **Exercice 03** On considère la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x} - x$

1- Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution réelle unique α sur l'intervalle $[0,1]$.

2- Montrer que la méthode de Newton suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$$

converge vers la solution α

Normal scientific calculator is allowed
the use of a smartphone is prohibited
Short and direct answers are forbidden

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة العلمية العادية
يمنع استخدام الهاتف الذكي.
يمنع تقديم الاجابة على الاسئلة بطريقة مباشرة أو مختصرة.

Exercice obligatoire: Soit la tabulation de la fonction

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 1,5$	$x_2 = 2$	$x_3 = 2,5$
$f(x_i)$	0	0,4055	0,6931	0,9163

1- Donner le polynôme d'interpolaion de Newton $P_2(x)$ de degrée 2 , passant par x_0, x_1, x_2 , puis obtenir l'erreur $E_2(x)$.
2- Appliquer la méthode de trapèze pour approximer l'intégrale

$$I(P_2) = \int_1^{2,5} P_2(x)\,dx \qquad (n=3)$$

3- Estimer l'erreur d'intégration de $I(P_2)$.

1- Donner le polynôme d'interpolaion de Newton $P_2(x)$ de degrée 2 , passant par x_0, x_1, x_2

x_i	$f(x_i)$	DD_1 2	DD_2	DD_3
1	$\boxed{0}\ a_0$	$\frac{0,4055-0}{1,5-1} = \boxed{0,811}\ a_1$	$\frac{0,5752-0,811}{2-1} = \boxed{-0,2358}\ a_2$	$\frac{-0,1288+0,2358}{2,5-1} = \boxed{0,07133}\ a_3$
1,5	0,4055	$\frac{0,6931-0,4055}{2-1,5} = 0,5752$	$\frac{0,4464-0,5752}{2,5-1,5} = -0,1288$	
2	0,6931	$\frac{0,9163-0,6931}{2,5-2} = 0,4464$		
2,5	0,9163			

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \quad 0,5$$

$$P_2(x) = 0,811(x-1) - 0,2358(x-1)(x-1,5)$$

$$\boxed{P_2(x) = -0,2358x^2 + 1,4005x - 1,1647} \quad 2$$

l'erreur $E_2(x)$. En appliquant la relation suivante $\boxed{E_n(x) = \left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right] f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]}$

on trouve :

$$E_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\overbrace{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}^{= a_3} \quad 1$$

$$E_2(x) = 0,07133(x-1)(x-1,5)(x-2)$$

$$\boxed{E_2(x) = 0,07133x^3 - 0,320985x^2 + 0,463645x - 0,21399} \quad 2$$

2- Appliquer la méthode de trapèze pour approximer l'intégrale

$$I(P_2) = \int_1^{2,5} P_2(x)\,dx \qquad (n=3)$$

$$\boxed{I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \tilde{I}(f)}$$

$$\boxed{\tilde{I}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right]}$$

$$h = \frac{2,5-1}{3} = 0,5 \quad 0,5$$

$$\tilde{I}(P_2) = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_3)+2\left(f(x_1)+f(x_2)\right)\right] \quad 0,5$$

$$= \frac{0,5}{2}\left[0+0,9163+2(0,6931+0,4055)\right] \quad 1$$

$$\boxed{\tilde{I}(P_2) = 0,778375} \quad 1$$

Trapezoid méthod:

integration error:

$$E(f) = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]\right|$$

$$= \left|-\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(c)\right| \quad ; \quad c \in [a,b]$$

$$= \left|-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c)\right| \leq M_1\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

où $M_1 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$

3- Estimer l'erreur d'intégration de $I(P_2)$.

$$E(P_2) \leq M_1\frac{(b-a)^3}{12n^2} \quad 0,5$$

$$M_1 = \max_{[1, 2,5]}|P_2''(x)| \quad 0,5$$

$$P_2(x) = -0,2358x^2 + 1,4005x - 1,1647$$

$$P_2'(x) = -0,4716x + 1,4005 \quad 0,5$$

$$\boxed{P_2''(x) = -0,4716} \quad 0,5$$

$$E(P_2) \leq 0,4716 \cdot \frac{(1,5)^3}{12 \cdot 9} \quad 0,5$$

$$\boxed{E(P_2) \leq 0,0147} \quad 1$$

Exercice 03 On considère la fonction g définie par : $g(x) = e^{-x} - x$

1- Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution réelle unique α sur l'intervalle $[0,1]$.

2- Montrer que la méthode de Newton suivante :
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$$
converge vers la solution α

$$g(x) = e^{-x} - x$$

1) g continue sur $[0,1]$ 0,5

$g(0) \cdot g(1) < 0$ 0,5

la monotonie de g : $g'(x) = \underbrace{-e^{-x} - 1}_{0,25} = -\overbrace{(e^{-x} + 1)}^{>0} < 0$ 0,25

donc g est strictement décroissante sur $[0, 1]$ 0,25

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'equation $e^{-x} - x = 0$ possède une solution réelle unique α sur $[0,1]$. 0,25

2) En appliquant le théorème de convergence de cette méthode :

- $g(0) \cdot g(1) < 0$
- $\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = -e^{-x} - 1 \neq 0$ 1
- $\forall x \in [0,1]$, $g''(x) = e^{-x} \neq 0$ 1
- $g(0) \cdot g''(0) > 0$ 1

donc la suite
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)} \end{cases}$$
1

converge vers la solution α.

La méthode de Newton:

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ tels que:

1) $f(a) \cdot f(b) < 0$
2) $\forall x \in [a,b]$ $f'(x) \neq 0$
3) $\forall x \in [a,b]$ $f''(x) \neq 0$

alors l'equation f(x)=0 possède une seule racine dans [a , b], et $\forall x_0 \in [a,b]$ **la suite** (x_n) définie par $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \in [a,b]. \end{cases}$ **converge quadratiquement.**

Remarque: une bonne approximation initiale x_0 est celle qui vérifié l'inégalité suivante:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Exercice 02 Soit le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' - t^2 y = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Calculer $y(0{,}25)$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $h = 0{,}25$

$$\begin{cases} y' = t^2 y + t^2 = t^2(y+1) \\ y(0) = 2 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \quad ; \ t \in [t_0, T] \end{cases}$$

Méthode de Runge - Kutta :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(C_1 + 2(C_2 + C_3) + C_4\right)$$

$$C_1 = f(t_i, y_i)$$
$$C_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2} ; y_i + \frac{h}{2} C_1\right)$$
$$C_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2} ; y_i + \frac{h}{2} C_2\right)$$
$$C_4 = f(t_i + h ; y_i + h C_3)$$

$$\boxed{t_i = t_0 + ih} \qquad t_0 = 0 \ (0{,}25) \qquad t_1 = 0{,}25 \ (0{,}25) \qquad t_2 = 0{,}5$$

$$\boxed{y_0 = 2}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[C_1 + 2(C_2 + C_3) + C_4\right] \quad 0{,}5$$

(1) $C_1 = f(t_0, y_0) = t_0^2(y_0 + 1) = 0$

(1) $C_2 = f\left(t_0 + \frac{0{,}25}{2} ; y_0 + \frac{0{,}25}{2} C_1\right) = f(0{,}125 , 2) = (0{,}125)^2(2+1) = 0{,}046875$

(1) $C_3 = f\left(t_0 + \frac{0{,}25}{2} ; y_0 + \frac{0{,}25}{2} C_2\right) = f(0{,}125 ; 2{,}005859) = 0{,}04724121$

(1) $C_4 = f(t_0 + 0{,}25 , y_0 + 0{,}25 C_3) = f(0{,}25 , 0{,}03125) = 0{,}18823814$

$$y_1 = 2 + 0{,}04166\left[0 + 2(0{,}046875 + 0{,}04724121) + 0{,}18823814\right]$$

$$\boxed{y_1 = 2{,}015684}$$

$$\boxed{y(0{,}25) = y_1 = 2{,}015684} \quad (1)$$

Exercice 01 Donner l'approximation de la fonction :

$$h(x) = e^{-x}\sqrt{(1-x^2)} \quad ; x \in [-1, 1]$$

par les deux premiers polynômes de tchebychev.

Polynômes de Tchebychev:

$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ ou $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$; $x \in [-1, 1]$

$T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$

$T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x)$

$T_0(x) = 1$ | $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_1(x) = x$ | $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$$f(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \cdots\cdots a_n T_n(x).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,T_n(x)\,dx \quad ; \quad n \neq 0$$

Les 2 premiers polynômes de tchebychev.

$T_0(x) = 1$ (0,25) ; $T_1(x) = x$ (0,25)

L'approximation s'écrit sous la forme :

$H(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x)$ (0,25)

où :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot h(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(e^{-x}\sqrt{1-x^2}\right) dx$$

(2)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} e^{-x}\,dx = \frac{\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1}}{\pi} = \frac{e - e^{-1}}{3{,}1416}$$

$$\boxed{a_0 = 0{,}74815}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, h(x)\, T_1(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(e^{-x}\sqrt{1-x^2}\right) \cdot x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x e^{-x}\,dx \qquad \left\langle \begin{matrix} U = x & U' = 1 \\ V' = e^{-x} & V = -e^{-x} \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[-x e^{-x}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-e^{-1} - e + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1}\right]$$

(2)

$$= \frac{2}{\pi}\left[-e^{-1} - e + e^{+1} - e^{-1}\right] = \frac{-4e^{-1}}{\pi} = -0{,}46840$$

$$\boxed{a_1 = -0{,}46840}$$

$$\boxed{H(x) = 0{,}74815 - 0{,}46840\,x}$$ (1,25)