

§ C : 4 pts

Cochez La ou les bonnes réponses

1) quelles méthodes nous utilisons pour résoudre le système matriciel

$AX=B$ sachant que $\det A=0$

a) Méthode de Cramer (1) et (2)

☒ b) Méthode de Gauss ~~X~~

c) Méthode LU

2) Nous voulons résoudre une équation différentielle par une méthode numérique. Parmi ces méthodes quelles méthodes nous pouvons utiliser ?

~~X~~ a) Méthode à pas améliorée d'Euler

☒ b) Méthode de Newton Raphson

~~X~~ c) Méthode de Runge Kutta

☒ d) Méthode du point fixe

3) Pour résoudre une équation non linéaire par la méthode du point fixe, f une fonction continue de $[a,b]$ vers $[a,b]$ f doit vérifier

~~X~~ a) $\forall x \in [a,b] \quad a \leq f(x) \leq b$

☒ b) $x_{k+1} = f(x_k) \quad k=0,1,2, \dots$

~~X~~ c) f contractante

☒ d) $f(a) \cdot f(b) < 0$

4) Le polynôme de Lagrange ou de Newton qui interpole une fonction $f(x)$ en n points distincts est de degré

a) n

b) n+1

☒ c) n-1

d) 2n

Exercice 1

A) Soit la fonction $f(x) = e^x - x - 1$ $x \in [-1, 1]$

1) Par un tableau de Variation Localiser et déterminer la solution x^* de f dans $[-1, 1]$

1pt

x	-1	0	1
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	0	$e-2$

$$f(-1) = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(1) = e - 2$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 \text{ solution de } f \text{ ds } [-1, 1]$$

2) Est-ce que nous pouvons utiliser la méthode de dichotomie pour déterminer la solution de f ? pourquoi

① Non car $f(-1) \cdot f(1) > 0$

3) Par contre nous pouvons utiliser la méthode de Newton

Raphson car

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 + \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e} - 1} \in [-1, 1]$$

x_2 aussi de suite

4) Déterminer la solution x^* de f dans $[-1, 1]$ par la méthode graphique

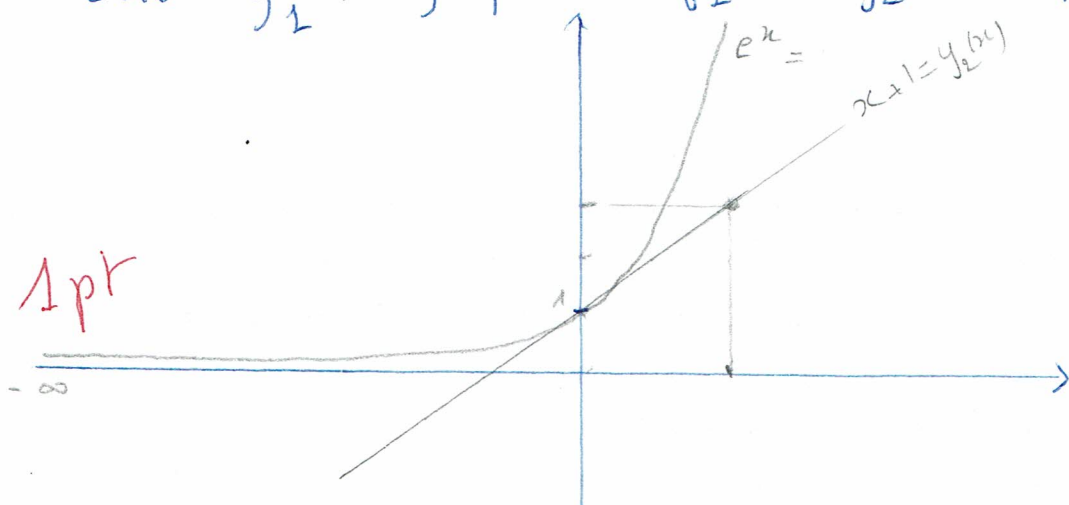
$$f(x) = e^x - x - 1$$

on pose $f_1(x) = e^x$

et $f_2(x) = x + 1$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

Soit y_1 le graphe de f_1 et y_2 le graphe de f_2



Le point $M = (0, 1)$ est le point d'intersection entre y_1 et y_2

5) La solution $x = x^* = 0$ est un point fixe de f
 0,5 pr car $f(0) = 0$

B La fonction $g(x) = e^x - 1$ $x \in [-1, 1]$

a) Le polynôme de Lagrange qui interpole la fonction g aux points

$$M_0 = \left(-1, \frac{1}{e} - 1\right) \quad M_1 = (0, 0) \quad M_2 = (1, e - 1)$$

1) $L_0(x) = \frac{x^2 - x}{2}$

2) $L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x)}{(1 - 0)(1 - (-1))} = \frac{x^2 + x}{2}$

3) $L(x) = \sum_{i=0}^2 y_i L_i(x) = \left(\frac{1}{e} - 1\right) L_0(x) + 0 \cdot L_1(x) + (e - 1) L_2(x)$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} + e - 2 \right) x^2 + \left(e - \frac{1}{e} \right) x$$

b) Le polynôme $N(x)$ qui interpole les points M_0, M_1, M_2 est

$$N(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

0,5 pr

$$g(x_0) = \frac{1}{e} - 1 = g(x_1)$$

$$g(x_0, x_1) = \frac{g(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{g(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{e} - 1}{(-1)} = 1 - \frac{1}{e}$$

dc
0,5 pr

$$N(x) = \frac{1}{e} - 1 + \left(1 - \frac{1}{e}\right)(x+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} + e - 2\right)(x^2 + x)$$

C) 1) $\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_{-1}^1 = \left(e - \frac{1}{e}\right) - (1+1)$
 $= e - \frac{1}{e} - 2$
 $\approx 0,35041$

0,5 pr

$$2) A_1(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)(g(a) + g(b)) = \frac{2}{2}\left(\frac{1}{e} - 1 + e - 1\right)$$

0,5 pr

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - 2 = 1,08615$$

0,5 pr

$$A_2(x) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[g(a) + g(b)\frac{1}{2} + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{2}\left[(g(-1) + g(1))\frac{1}{2} + g(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e} - 1 + e - 1\right] + 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e} + e - 2\right] = 0,54307$$

$$3) S(x) = \left(\frac{b-a}{6}\right)[g(a) + 4g(c) + g(b)] \quad c = \frac{a+b}{2}$$

0,5 pr

$$S(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{e} - 1 + 4 \cdot 0 + e - 1\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{e} + e - 2\right] = 0,36205$$

4) l'erreur ds la Cos Formule de Trapez

$$n=1 \quad E_1 = e \frac{(2)^3}{12} = \frac{2}{3}e$$

$$n=2 \quad E_2 = \frac{e(2)^3}{12n^2} = \frac{8e}{12 \times 4} = \frac{8e}{48} = \frac{e}{6}$$

1 pr

Formule de Simpson

$$E_s = M_4 \frac{(b-a)^5}{180 \times 2^4} = \sup_{x \in [-1,1]} e^x \cdot \frac{2^5}{180 \times 2^4} = e \times \frac{1}{90}$$

5) Dans ce cas la méthode de Simpson est la meilleure
 0.5pt On propose $n > 2$

D) $\begin{cases} \frac{df}{dx} = e^x - 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \int e^x - 1 = e^x - x + C$
 0.5pt $f(0) = e^0 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = -1$

$$f(x) = e^x - x - 1$$

Exercice 2

1) $b = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{\det A} = 0$ 0.5pt

2) $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{5}{20} & 0 & -\frac{5}{20} \\ \frac{10}{20} & -\frac{4}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{20}{20} & -\frac{12}{20} & -\frac{4}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 1pt

3) Méthode de Gauss

1pt $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1' = L_1 \\ L_2' = L_2 - 2L_1 \\ L_3' = L_3 + L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3' = L_3' + 3L_2'} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{array} \right)$
 dc $X = (1, 0, 1)$

4) $AX = LU \Rightarrow \begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$

$LY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

1pt $UX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$X = (a, b, c) = (1, 0, 1)$
 Pages

le système homogène $AX=0$

0.5

$$AX=0 \Rightarrow X=0 \Rightarrow$$

$$\text{Kerf} = \{0, 0, 0\} \Rightarrow \dim \text{Kerf} = 3 \Rightarrow \dim \text{Imf} = \text{rg } A = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Kerf}$$

$$= 3 - 0 = 3$$

1.1d