Université Abou Bekr Belkaid
Faculté de Technologie
Département GBM

A.U. :2020/2021

Le : 09/06/2021

<u>Epreuve finale GB211</u> Durée : 1 heure

<u>EXERCICE n°1</u> $(5\boldsymbol{pts})$

1- Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction $tan(x)$

$$tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$ 2pts+1pt

La dernière égalité est obtenue en faisant la division suivant les puissances croissantes des parties régulières de $sin\ x\ et\ cos\ x$. 1pt

2- Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)-x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$ 1pt

<u>EXERCICE n°2</u> $(\ 10\boldsymbol{pts}\ )$

Calculer les primitives suivantes :

1- $I = \int arctan(x)dx$ Par parties : $I = x\ arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}dx$ 1pt

$I = x\ arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = x\ arctan(x) - \frac{1}{2}ln(x^2+1) + C$ 1pt+1pt

2- $J = \int sin^2x cos^3x\ dx = \int sin^2x cos^2x \cos x\ dx$ 1pt

$= \int sin^2x(1 - sin^2x)\cos x\ dx = \int sin^2x \cos x\ dx - \int sin^4x \cos x\ dx$ 1pt

$J = \frac{sin^3x}{3} - \frac{sin^5x}{5} + C$ 1pt

3- $K = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx$ on pose $F(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}$ sa décomposition en éléments simples s'écrit : $\mathrm{F}(x) = \frac{a}{(x-1)} + \frac{bx+c}{(x^2+1)}$ 0.5pt

$a = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x^2+1)} = \frac{3}{2}$ O.5pt

$\lim_{x\to 0} xF(x) = 0$, d'autre part $\lim_{x\to 0} xF(x) = b + \frac{3}{2}$ d'où $b = -\frac{3}{2}$ O.5pt

$\mathrm{F}(0) = -2\ et\ F(0) = -\frac{3}{2} + c$ d'où $c = -\frac{1}{2}$ O.5pt

D'où $F(x) = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3x+1}{2(x^2+1)}$

$K = \int \left(\frac{3}{2(x-1)} - \frac{3x+1}{2(x^2+1)}\right) dx$

$K = \frac{3}{2} ln|x-1| - \frac{3}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}$ O.5pt +O.5pt

$K = \frac{3}{2} ln|x-1| - \frac{3}{4} ln(x^2+1) - \frac{1}{2} arctanx + C$ O.5pt+ O.5pt

EXERCICE n°3 ($5pts$)

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$

- Pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible.

A est inversible si $dét(A) \neq 0$

$$dét(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1 + a^2 - a$$ 1pt

le polynôme $p(a) = a^2 - a + 1$ n'a pas de racine car son discriminant est strictement négatif ($\Delta = -3$). 1pt

$dét(A) \neq 0\ \forall a \in \mathbb{R}$, d'où $\forall a \in \mathbb{R}, A$ est inversible. O.5pt

- On suppose que $a = 1$, calculer A^{-1} par la méthode de Gauss.

- $\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} l1 \\ l2 \\ l3 \end{array}$ O.5pt

- $\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} l1 \\ l2 \leftarrow l2 - l1\ ; \\ l3 \leftarrow l3 - l1 \end{array}$ O.5pt

- $\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} l1 \\ l2 \leftrightarrow l3 \\ l3 \leftrightarrow l2 \end{array}$ O.25pt

- $\left\{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} l1 \\ l2 \leftrightarrow l2 - l3\ \ ; \\ l3 \end{array}$ O.5pt

- $\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} l1 \\ l2 \leftrightarrow -l2 \\ l3 \end{matrix}$ O.25pt

- $\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} l1 \leftarrow l1 - l2 \\ l2 \\ l3 \end{matrix}$ O.5pt

Conclusion : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

QUESTION BONUS (2pts)

Résoudre l'une des équations différentielles suivantes, en donnant sa nature.

1- $y' + 2xy = e^{-x^2}$ 2- $x^2y' = x^2 + y^2 - xy$

$1 - xy = e^{-x^2}$ Est une équation linéaire d'ordre 1

a- *L'équation homogène associée est :* $y' + 2xy = 0$ *admet* $y_H = ke^{-x^2}$ où $k\epsilon\mathbb{R}$ *comme solution générale.*

b- *On cherche* une solution particulière par la méthode de la variation de la constante

On pose $y_p = k(x)e^{-x^2}$, $y'_p = k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2}$

$y'_p + 2xy_p = e^{-x^2} \Rightarrow \left(k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2}\right) + 2xk(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}$

D'où $k'(x) = 1 \Rightarrow k(x) = x$ et $y_p = xe^{-x^2}$

c- Conclusion : la solution générale de l'équation (1) est : $y = (x + k)e^{-x^2}$ où $k\epsilon\mathbb{R}$

(2): $x^2y' = x^2 + y^2 - xy$ est homogène en x *et* y car (2) $\Leftrightarrow$ (2') $y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$

$(y'est\ fonction\ de\ \left(\frac{y}{x}\right))$.

On pose : $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$

(2') devient : $t'x + t = 1 + t^2 - t \Rightarrow \frac{dt}{dx}x = (1 - t)^2 \Rightarrow \frac{1}{1-t} = ln|x| + c$

$1 - t = \frac{1}{ln|x|+c} \Rightarrow t = 1 - \frac{1}{ln|x|+c}$

Conclusion : La solution générale de l'équation (2) est : $y = x\left(1 - \frac{1}{ln|x|+c}\right)$ où $c\epsilon\mathbb{R}$