

Solution Examen MS523

du 07 mars 2021

Exercice 01 (07 pts)

Données: $b_1 = b_2 = 64 \text{ mm}$, $r_1 = 51 \text{ mm}$, $r_2 = 406 \text{ mm}$, $\beta_1 = 15^\circ$, $\beta_2 = 7^\circ$
 $N = 900 \text{ tr/min}$, $\gamma = 0,89$.

1) Détermination de Q_v (02 pts)

$$Q_v = S_1 V_{r1} = S_1 V_1 \quad (\alpha_1 = 90^\circ)$$

$$Q_v = 2\pi r_1 b_1 V_1 \quad 0,5$$

$$U_1 = \omega r_1 = \frac{2\pi N}{60} r_1 = \frac{2\pi \cdot 900}{60} \cdot 0,051 = 4,8 \text{ m/s} \leftarrow U_1 \quad 0,5$$

$$V_1 = U_1 \tan \beta_1 = 4,8 \tan 15^\circ = 1,28 \text{ m/s} \leftarrow V_1 \quad 0,5$$

$$Q_v = 2\pi \cdot 0,051 \cdot 0,064 \cdot 1,28 = 26,23 \text{ l/s} \leftarrow Q_v \quad 0,5$$

2) L'augmentation de la pression statique à travers la roue (03 pts)

$$\textcircled{1} H = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta z, \text{ tel que les indices (1) et (2) font référence à l'entrée et à la sortie de la roue}$$

$$\text{D'après les triangles de vitesses: } \tan \beta_2 = \frac{V_{r2}}{U_2 - V_{u2}}$$

$$V_{r2} = \frac{Q_v}{S_2} = \frac{Q_v}{2\pi r_2 b_2} = \frac{26,23 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 0,203 \cdot 0,064} = 0,321 \text{ m/s} \leftarrow V_{r2} \quad 0,5$$

$$U_2 = \omega r_2 = \frac{2\pi N}{60} r_2 = \frac{2\pi \cdot 900}{60} \cdot 0,203 = 19,12 \text{ m/s} \leftarrow U_2 \quad 0,5$$

$$V_{u2} = U_2 - \frac{V_{r2}}{\tan \beta_2} = 19,12 - \frac{0,321}{\tan 7^\circ} = 16,5 \text{ m/s} \leftarrow V_{u2} \quad 0,5$$

$$V_2 = \sqrt{V_{u2}^2 + V_{r2}^2} = \sqrt{16,5^2 + 0,321^2} = 16,51 \text{ m/s} \leftarrow V_2 \quad 0,5$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = H - \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \right) - \Delta z$$

$$\text{ou } \Delta z \text{ peut être évalué par: } \Delta z = r_2 - r_1 = 0,203 - 0,051 = 0,152 \text{ m} \leftarrow \Delta z$$

Par ailleurs, la hauteur totale peut être évaluée par l'équation d'Euler:

$$H = \frac{U_2 V_{u2}}{g} = \frac{19,12 \cdot 16,51}{9,81} = 32,17 \text{ m} \leftarrow H \quad 0,5$$

Ainsi:

$$\Delta P = \rho g \left(H - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} - \Delta z \right) = 9810 \left(32,17 - \frac{16,51^2 - 1,28^2}{2 \cdot 9,81} - 0,152 \right) = 181,607 \text{ kPa} \leftarrow \Delta P \quad 0,5$$

3) Détermination de P_u (1)

$$P_u = \rho g Q_v H = 9810 \cdot 0,02623 \cdot 32,17 = 8277 \text{ W} \leftarrow P_u \quad (1)$$

4) Détermination de P_r (1)

$$P_r = \frac{P_u}{\eta} = \frac{8277}{0,89} = 9300 \text{ W} \leftarrow P_r \quad (1)$$

Exercice 02

Données: $N_1 = 600 \text{ tr/min}$, $Q_v = 22,7 \text{ m}^3/\text{min}$, $H_1 = 19,5 \text{ m}$, $H_2 = 30,5 \text{ m}$
 $\eta = 0,7$

1) Type de pompe (2 pts)

$$(1) N_s = \frac{\omega \sqrt{Q_v}}{(gH)^{3/4}} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \cdot 600}{60} = 62,8 \text{ rad/s} \leftarrow \omega$$

$$N_s = \frac{62,8 \sqrt{22,7/60}}{(9,81 \cdot 19,5)^{3/4}} = 0,751 \leftarrow N_s \quad (1) \quad N_s < 1 \rightarrow \text{Utilisation d'une pompe radiale}$$

2) Détermination de la vitesse de rotation, du débit et de P_r pour $H_2 = 30,5 \text{ m}$ (06)

Pour cette même pompe ($D_2 = D_1$), on peut écrire entre les deux régimes :

$$\begin{aligned} 1) \quad C_{H_1} = C_{H_2} &\Leftrightarrow \frac{g H_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{g H_2}{\omega_2^2 D_2^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{H_2}{H_1} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \\ &\Rightarrow N_2 = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \cdot N_1 = \sqrt{\frac{30,5}{19,5}} \cdot 600 \\ &\quad (1) \quad N_2 = 750 \text{ tr/min} \end{aligned}$$

$$2) \quad Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow \frac{Q_{v1}}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_{v2}}{\omega_2 D_2^3} \Rightarrow Q_{v2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_{v1} = \frac{N_2}{N_1} Q_{v1} = \frac{750}{600} \cdot 22,7$$

$$(1) \quad Q_{v2} = 28,38 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$3) \quad \frac{P_r}{\rho_1 \omega_1^3 D_1^5} = \frac{P_r}{\rho_2 \omega_2^3 D_2^5} \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \rho_2 \text{ et } D_1 = D_2 \Rightarrow P_r = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 P_{r1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3 P_{r1}$$

$$0,5 \quad P_{r1} = \frac{P_{u1}}{\eta} = \frac{\rho g Q_{v1} H_1}{\eta} = \frac{9810 \cdot 22,7 \cdot 19,5}{60 \cdot 0,7} = 103,39 \text{ kW} \leftarrow P_{r1} \quad (0,5)$$

$$\text{Ainsi, } P_{r2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3 P_{r1} = 1,25^3 \cdot 103,39 = 201,93 \text{ kW} \leftarrow P_{r2} \quad (1)$$

Exercice 02 08 pts

Données : $N = 600 \text{ tr} / \text{m} \cdot \text{in}$, $Q_v = 22.7 \text{ m}^3 / \text{m} \cdot \text{in}$, $H_1 = 19.5 \text{ m}$, $\eta = 0.7$, $H_2 = 30.5 \text{ m}$

1) Type de pompe (02 pts)

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62.8 \text{ rad} / \text{s} \quad (0.5)$$

$$N_s = \frac{\omega \sqrt{Q_v}}{(gH)^{0.75}} = \frac{62.8 \sqrt{22.7 / 60}}{(9.81 \times 19.5)^{0.75}} = 0.751 \quad (0.5)$$

Une pompe radiale est donc recommandée (0.5)

2) Vitesse de rotation, débit et puissance requise (06 pts)

$$P_{r1} = \frac{P_{u1}}{\eta} = \frac{\rho g Q_v H}{\eta} = \frac{1000 \times 9.81 \times \frac{22.7}{60} \times 19.5}{0.7} = 103.4 \text{ kW} \quad (1)$$

Modèle	Prototype
$D_1 = D_2$	
$H_1 = 19.5 \text{ m}$	$H_2 = 30.5 \text{ m}$
$N_1 = 600 \text{ tr} / \text{m} \cdot \text{in}$	$N_2 = ?$
$Q_{v1} = 22.7 \text{ m}^3 / \text{m} \cdot \text{in}$	$Q_{v2} = ?$
$P_{r1} = 103.4 \text{ kW}$	$P_{r2} = ?$

$$C_{H1} = C_{H2} \Leftrightarrow \frac{gH_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{gH_2}{\omega_2^2 D_2^2} \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = \frac{H_2}{H_1} \Rightarrow N_2 = N_1 \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} = 600 \sqrt{\frac{30.5}{19.5}} = 750 \text{ tr} / \text{m} \cdot \text{in} \leftarrow N_2 \quad (1)$$

$$C_{D1} = C_{D2} \Leftrightarrow \frac{Q_{v1}}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_{v2}}{\omega_2 D_2^3} \Rightarrow Q_{v2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_{v1} = \frac{N_2}{N_1} Q_{v1} = \frac{750}{600} \times 22.7 = 28.38 \text{ m}^3 / \text{m} \cdot \text{in} \leftarrow Q_{v2} \quad (1)$$

$$C_{P1} = C_{P2} \Leftrightarrow \frac{P_{r1}}{\rho \omega_1^3 D_1^5} = \frac{P_{r2}}{\rho \omega_2^3 D_2^5} \Leftrightarrow P_{r2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^3 P_{r1} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^3 P_{r1} = \left(\frac{750}{600} \right)^3 \times 103.4 = 202 \text{ kW} \leftarrow P_{r2} \quad (1)$$

Exercice 03 05 pts

Données : $N = 600 \text{ tr} / \text{m} \cdot \text{in}$, $Q_v = 1 \text{ m}^3 / \text{s}$, $L = 500 \text{ m}$, $D = 750 \text{ mm}$, $f = 0.019$, $\sum k = 3$, $\Delta z = 15 \text{ m}$

1) Type de pompe

$$N_s = \frac{\omega \sqrt{Q_v}}{(gH)^{0.75}} \quad (1)$$

Où

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62.8 \text{ rad} / \text{s} \quad (1)$$

$$H = \Delta z + \left(f \frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{V^2}{2g} = \Delta z + \left(f \frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{8Q_v^2}{\pi^2 D^4 g} \quad ①$$

$$H = 15 + \left(0.019 \times \frac{500}{0.75} + 3 \right) \frac{8 \times 1}{\pi^2 0.75^4 \times 9.81} \approx \underline{19.1 \text{ m} \leftarrow H} \quad ①$$

$$N_s = \frac{\omega \sqrt{Q_v}}{(gH)^{0.75}} = \frac{62.8 \sqrt{1}}{(9.81 \times 19.1)^{0.75}} = 1.24 \quad \underline{\text{Une pompe mixte est donc recommandée}} \quad ①$$