الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Aboubakr BELKAÏD – Tlemcen –
جامعة أبي بكر بلقايد – تلمسان –
Faculté de Technologie
كلية التكنولوجيا

Solution de l'examen ME-MR 722

1- En injectant une solution $c(x) = e^{ax}$ dans l'équation (1), on obtient :

$$uae^{ax} - ka^2e^{ax} = 0$$

$$ae^{ax}(u - ka) = 0$$

L'équation précédente admet deux solutions :

$$a_1 = 0;\ a_2 = \frac{u}{k}$$

et par conséquent, la solution $c(x)$ est égale à :

$$c(x) = Ae^{a_1x} + Be^{a_2x} = A + Be^{\frac{ux}{k}}$$

Les constantes A et B sont calculées grâce aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} c(0) = A + B = 0 \\ c(L) = A + Be^{\frac{uL}{k}} = \phi \end{cases}$$

$$c(L/2) = \phi\left(\frac{e^{\frac{\mathrm{P}}{2}} - 1}{e^{\mathrm{P}} - 1}\right) \quad \text{avec } \mathrm{P} = \frac{uL}{k}$$

2- Le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de P de la fonction $c(x)$ s'écrit :

$$c_D = c_P + h\left(\frac{dc}{dx}\right)_P + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{d^2c}{dx^2}\right)_P + \varepsilon(h^3)$$

$$c_G = c_P - h\left(\frac{dc}{dx}\right)_P + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{d^2c}{dx^2}\right)_P + \varepsilon(h^3)$$

En faisant la soustraction, puis l'addition des deux équations :

$$\left(\frac{dc}{dx}\right)_P = \frac{c_D - c_G}{2\,h} + \varepsilon(h^2)$$

$$\left(\frac{d^2c}{dx^2}\right)_P = \frac{c_D - 2c_P + c_G}{h^2} + \varepsilon(h^2)$$

3- En substituant les équations précédentes dans l'équation (1), on obtient :

$$u\frac{c_D - c_G}{2\,h} - k\frac{c_D - 2c_P + c_G}{h^2} = 0$$

$$-\left(\frac{k}{h^2} + \frac{u}{2h}\right)c_G + 2\frac{k}{h^2}c_P + \left(-\frac{k}{h^2} + \frac{u}{2h}\right)c_D = 0$$

$$-\frac{k}{h^2}\left\{\left(1 + \frac{h\,u}{2\,k}\right)c_G - 2c_P + \left(1 - \frac{h\,u}{2\,k}\right)c_D\right\} = 0$$

$$(1 + P_e)c_G - 2\,c_P + (1 - P_e)c_D = 0 \quad \text{avec } P_e = \frac{u\,h}{2\,k}$$

4- Dans le cas d'un maillage uniforme à 3 nœuds.

$$c_P = \frac{(1 - P_e)}{2}\phi$$

5- D'après la question n°1, $c(L/2)$ est toujours positif, cette condition est vérifiée si :

$$P_e \leq 1$$