Université Aboubekr Belkaid - Faculté de Technologie
Département de GEE

Commande Avancée M2 Automatique

Examen final

28 Février 2021

Exercice 1. *Trouver l'extrémale de la fonctionnelle*

$$J(x) = \int_0^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\, dt$$

avec $x(0) = 2$ *et* $x(t_f)$ *doit se trouver sur la courbe* $\theta(t) = -4t + 5$.

Exercice 2. *On considère le système du premier ordre :*

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

On désire amener l'état du système à 0 à l'instant T $(x(T) = 0)$, *en minimisant le critère*

$$J = \int_0^T \frac{1}{2}(u^2 + \omega^2 x^2)dt$$

1. *Écrire l'Hamiltonien du système.*
2. *Écrire les équations adjointes du système.*
3. *Trouver la commande optimale.*
4. *Montrer que le système en boucle fermée est décrit par l'équation*

$$\ddot{x}(t) = \omega^2 x$$

.

5. *Résoudre l'équation de la question précédente et, trouver l'expression de la variable adjointe.*
6. *En utilisant les conditions aux limites sur* $x(t)$ $(x(0) = x_0, \quad x(T) = 0)$ *trouver les constantes d'intégration.*
7. *Donner l'expression de la commande optimale en fonction du temps.*
8. *Donner l'expression de la commande si* $T \to \infty$

Correction Commande Avancée (2020/2021)

Exercice 1. 8pts extrémale de

$$J(x) = \int_0^{t_f} \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\, dt$$

avec $x(0) = 2$

$x(t_f)$ doit se trouver sur la courbe $\theta(t) = -4t+5$

$$\left.\begin{array}{ll} t_0, x(0) & \text{connus} \\ t_f, x(t_f) & \text{non fixés} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Pb } 4 \quad 0,5$$

Condition Normale d'optimalité :

$$\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} = 0 \quad 0,5$$

avec $g(x(t), \dot{x}(t), t) = \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad 0,5 \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}} \quad 0,5$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\right) = \frac{\ddot{x}(t)}{(1+\dot{x}^2(t))^{3/2}} \quad 0,5$$

CNO : $$\frac{\ddot{x}^*(t)}{\left[1+\dot{x}^{*2}(t)\right]^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}^*(t) = 0 \quad 0,5$$

$$\Rightarrow \dot{x}^*(t) = c_1 \quad 0,5$$

Solution extrémale $$\boxed{x^*(t) = c_1 t + c_2} \quad 0,5$$

Il reste à déterminer c_1, c_2 et t_f.

Conditions aux limites :

$$x^*(0) = 2 \iff \boxed{C_2 = 2} \quad 0{,}5$$

$$x^*(t_f) = C_1 t_f + 2 = -4t_f + 5 \quad 0{,}5$$

Condition de transversalité :

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right]_{\substack{x^* \\ t_f}} \left(\frac{d\theta}{dt}(t_f) - \dot{x}^*(t_f) \right) + g\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0$$

$0{,}5$

$$\frac{\dot{x}^*(t_f)}{\left[1+\dot{x}^{*2}(t_f)\right]^{1/2}} \left(-4 - \dot{x}^*(t_f) \right) + \left(1 + \dot{x}^{*2}(t_f)\right)^{1/2} = 0 \quad 0{,}5$$

$$-4\,\dot{x}^*(t_f) - \dot{x}^{*2}(t_f) + 1 + \dot{x}^{*2}(t_f) = 0$$

$$-4\,\dot{x}^*(t_f) + 1 = 0$$

$$-4C_1 + 1 = 0 \iff \boxed{C_1 = \frac{1}{4}} \quad 0{,}5$$

$\boxed{1}$ $$\frac{1}{4} t_f + 2 = -4t_f + 5$$

$$\frac{17}{4} t_f = 3 \Rightarrow \boxed{t_f = \frac{12}{17} = 0{,}705} \quad 0{,}5$$

finalement

$$\boxed{x^*(t) = \frac{1}{4} t + 2}$$

Exercice 2 : 12 pts

$$\dot{x} = u \qquad x(0) = x_0$$

$$x(T) = 0$$

$$J = \int_0^T \frac{1}{2}\left(u^2 + w^2 x^2\right) dt$$

1/ $\mathcal{H}(x(t), u(t), P(t), t) = \frac{1}{2}\left(u^2 + w^2 x^2\right) + P(t)\, u(t)$ 1

2/ $\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \underline{-w^2 x}$ 0,5 1

3/ $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \iff u^*(t) + P^*(t) = 0 \iff \boxed{u^*(t) = -P^*(t)}$ 0,5 1

4/ sy en BF :

$$\dot{x} = u^*(t) = -P^*(t)$$

$$\dot{p}^*(t) = -w^2 x(t)$$

1

$$\iff \ddot{x}(t) = -\dot{P}^*(t) = w^2 x(t) \iff \boxed{\ddot{x}(t) = w^2 x(t)}$$

5/ $\ddot{x} - w^2 x = 0$

l'eq caractéristique de cette équation a pour racines $r = \pm w$

La solution générale est donnée par :

$$x(t) = A e^{wt} + B e^{-wt}$$ 1

expression de la variable adjointe $P(t)$

$$\dot{x} = u = -P \iff P(t) = -\dot{x}(t)$$

$$\iff P(t) = -w\left(A e^{wt} - B e^{wt}\right)$$ 1

6/ $x(0) = A + B = x_0$ 0,5

$x(T) = Ae^{\omega T} + Be^{-\omega T} = 0$ 0,5

la résolution de ces deux équations donne :

$$A = \frac{e^{-\omega T}}{e^{\omega T} - e^{-\omega T}} x_0$$ 0,5

$$B = \frac{e^{\omega T}}{e^{\omega T} - e^{-\omega T}} x_0$$ 0,5

7/ $\dot{x} = u = -P(t) \Rightarrow u(t) = \omega(Ae^{\omega t} - Be^{-\omega t})$ 1

$$\Rightarrow u(t) = \frac{\omega}{e^{\omega T} - e^{-\omega T}} \left(e^{\omega(t-T)} - e^{-\omega(t-T)} \right) x_0$$

8/ si $T \to \infty$ alors $A \to 0$ et $B \to x_0$

donc $u(t) \to -\omega e^{-\omega t} x_0$ 0,5

et $x(t) \to e^{-\omega t} x_0$ 0,5

la commande devient un retour d'état linéaire

$$u(t) = -\omega x(t)$$ 1