Corrigé-type de l'examen du AS511
Commande des Systèmes Linéaires

8 mars 2021

Exercice 1

1. Stabilité du système représenté par la FTBF suivante [2 Pts] :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3+5s^2+s+5}$$

— Equation caractéristique : $den\left(F\left(s\right)\right) = 0 \Longrightarrow s^3+5s^2+s+5=0$

— Table de Routh

s^3	1	1	0
s^2	5	5	0
s^1	10	0	
s^0	5		

Equation auxiliare : $5s^2+5=0$

on dérive l'équation auxiliaire, on obtient : $10s$, et on complète la table de Routh par les coefficients issus de cette dérivée.

Tous les coefficients de la 1ère colonne sont positifs, donc le système est stable

2. Condition sur les valeurs de K permettant d'assurer la stabilité du système à retour unitaire de FTBO [2 Pts] :

$$G\left(s\right) = \frac{K}{s^3+3s^2+3s+1}$$

— La FTBF est :

$$F\left(s\right) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{s^3+3s^2+3s+1}}{1+\frac{K}{s^3+3s^2+3s+1}} = \frac{K}{s^3+3s^2+3s+1+K}$$

L'équation caractéristique du système est : $s^3+3s^2+3s+1+K=0$

— Table de Routh :

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 3 & 0 \\ s^2 & 3 & 1+K & 0 \\ s^1 & \frac{8-K}{3} & 0 & \\ s^0 & 1+K & & \end{array}$$

conditions de stabilité :

$8-K>0 \Longrightarrow K<8$

$1+K>0 \Longrightarrow K>-1$

Donc le système est stable pour $-1<K<8$

Exercice 2

Soit le système donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(s)=\frac{10}{(s+2)(s+5)}$$

1. Faire le tracé de Bode de $G(s)$ [9 Pts]
   - approximations + tracés asymptotiques [2 Pts]

     Fréquences de coupure : 2, 5
     - $G_1(j\omega)=10 \Longrightarrow |G_1|_{dB}=20\log 10=20dB$

       $\varphi_1=0°$
     - $G_2(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2} \Longrightarrow |G_2|_{dB}=\begin{cases}-20\log 2=-6dB & \omega \ll 2\\ -20\log\omega & \omega \gg 2\end{cases}$

       $\varphi_2=\begin{cases}0° & \omega \ll 2\\ -90 & \omega \gg 2\end{cases}$
     - $G_3(j\omega)=\frac{1}{j\omega+5} \Longrightarrow |G_3|_{dB}=\begin{cases}-20\log 5=-14dB & \omega \ll 5\\ -20\log\omega & \omega \gg 5\end{cases}$

       $\varphi_3=\begin{cases}0° & \omega \ll 5\\ -90 & \omega \gg 5\end{cases}$
   - tracé asymptotique global [1 Pt]
   - calcul des écarts [2 Pts]

ω	$\frac{1}{s+2}$	$\frac{1}{s+5}$	Total des écarts (dB)
$\omega=1$	-1	-0.17	-1.17
$\omega=2$	-3	-0.64	-3.64
$\omega=5$	-0.64	-3	-3.64
$\omega=10$	-0.17	-1	-1.17

Table 1 – Ecarts des amplitudes

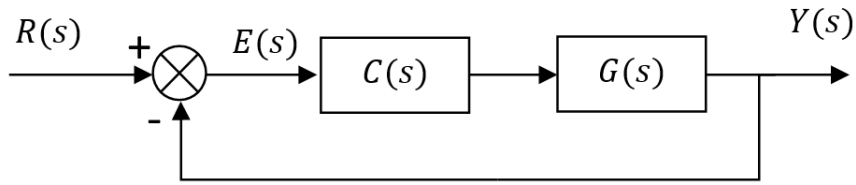


FIGURE 1 – schéma du système

ω	$\frac{1}{s+2}$	$\frac{1}{s+5}$	Total des écarts (°)
$\omega = 1$	-26.5	-11.3	-37.8
$\omega = 2$	-45	-21.8	-66.8
$\omega = 5$	$+21.8$	-45	-23.2
$\omega = 10$	$+11.3$	$+26.5$	-15.3

TABLE 2 – Ecarts des phases

— tracé final [3 Pts] + précision [1 Pt]

2. Marge de phase infinie $\Delta\varphi = \infty$ (pas d'intersection avec l'axe $0dB$) [1 Pt]
3. Calcul de l'erreur de position pour $C(s) = K_P$ [1.5 Pts]

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left[1 - F(s)\right]$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Longrightarrow Y(s) = R(s)F(s)$$

$$F(s) = \frac{CG(s)}{1 + CG(s)} = \frac{\frac{10K_P}{(s+2)(s+5)}}{1 + \frac{10K_P}{(s+2)(s+5)}} = \frac{10K_P}{(s+2)(s+5) + 10K_P} = \frac{10K_P}{s^2 + 7s + 10 + 10K_P}$$

$$E(s) = R(s)\left[1 - F(s)\right] = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{10K_P}{s^2 + 7s + 10 + 10K_P}\right] = \frac{1}{s}\left[\frac{s^2 + 7s + 10}{s^2 + 7s + 10 + 10K_P}\right]$$

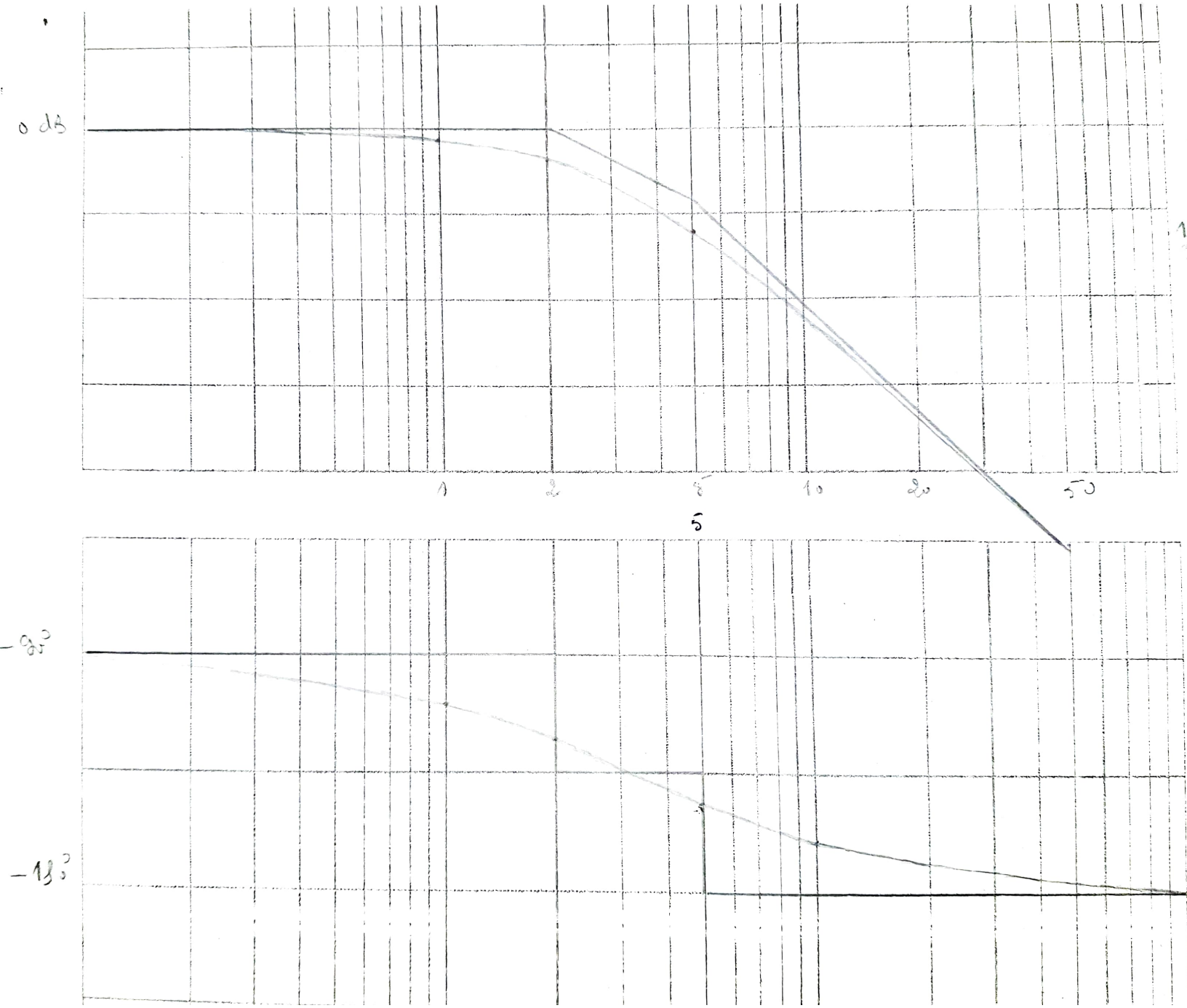
$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{1}{s}\left[\frac{s^2 + 7s + 10}{s^2 + 7s + 10 + 10K_P}\right] = \frac{1}{1 + K_P} \neq 0$$

Conclusion : si $K_P \nearrow$, $e(\infty) \searrow$, l'erreur peut être réduite, mais ne s'annule pas [0.5 Pts]

4. On obtient un $\Delta\varphi = 66.8°$ pour $\omega_c = 5rd/s$ [1 Pt]
   à $\omega_c = 5rd/s$, le gain vaut $-12.17dB \Longrightarrow K = 12.17dB = 10^{(12.17/20)} \simeq 4$ [1 Pt]
   pour $K = 4$, nous avons $\Delta\varphi = 66.5°$ [1 Pt]

5. La correction a augmenté le gain, donc elle a réduit l'erreur en régime permanent.

   Il faut au moins un intégrateur dans la chaine directe pour annuler définitivement l'erreur (augmentation du type du système) [1 Pt]


0 dB
1
2
5
10
20
50
5
-90°
-180°