UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN

Faculté de Technologie - Département de GEE
Spécialité : Génie Industriel - Productique
Année universitaire : 2020-2021
Matière : Analyse 1 (L1)

Examen final (1h)

Exercice 1: (10 points)

1. Trouver le réel a pour que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & si \quad x \leq 1 \\ 2-ax^3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

2. La fonction suivante admet-elle un prolongement par continuité aux points où elle n'est pas définie ?

$$g(x) = \frac{(x-1)\cos x}{2x^2-2}$$

Exercice 2: (10 points)
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \quad , \quad V_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \quad , \quad V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $0 < U_n \leq 2$ et $0 < V_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Donner une relation simple entre $U_{n+1} - V_{n+1}$ et $U_n - V_n$. En déduire l'expression de $U_n - V_n$ en fonction de n.

3. Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire.

Bon courage

Corrigé type

Exercice 1

1.
$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2-ax^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

* pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ f est une fonction polynomiale donc elle est continue pour tout $a \in \mathbb{R}$ (1)

* pour que f soit continue au point 1 il faut que :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1) = a+1$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \to 1} ax+1 = a+1 = f(1)$$ (1,5)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2-ax^3 = 2-a \; ..$$ (1,5)

$$2-a = f(1) = a+1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$ (1)

2.
$$g(x) = \frac{(x-1)\cos x}{2x^2-2}$$

- g est définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (1)

- $$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cos x}{2x^2-2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2} \frac{\cancel{(x-1)}\cos x}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{\cos(1)}{4}$$ (1)

Donc g admet un prolongement par continuité en 1, qu'on va noter $\tilde{g}$,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\cos x}{2x^2-2} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{\cos(1)}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad 1$$

- $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x-1)\cos x}{2x^2-2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{2} \dfrac{\cos x}{x+1} = \infty$ 1

Donc g n'admet pas de prolongement par continuité en -1. 1

Exercice 2:

Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \quad , \quad V_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \quad , \quad V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

1. On montre, par récurrence, que $0 < U_n \leq 2$ et $0 < V_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- pour $n=0$ $\quad 0 < U_0 = 2$ et $0 < V_0 = 1 < 2$ 1

- On suppose que $0 < U_n \leq 2$ et $0 < V_n \leq 2$ 1

Donc:

d'une part $0 < U_n + V_n \leq 4$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{U_n + V_n}{2} \leq 2$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} \leq 2$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; 0 < U_n \leq 2$ 1

d'autre part

$0 < U_{n+1} + V_n \leq 4$

$\Rightarrow 0 < V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} \leq 2$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < V_n \leq 2$ 1

2. $U_{n+1} - V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} - \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} = \dfrac{U_n - U_{n+1}}{2} = \dfrac{U_n - \frac{U_n + V_n}{2}}{2}$

$\Rightarrow \quad U_{n+1} - V_{n+1} = \dfrac{U_n - V_n}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 1

Donc $\quad U_n - V_n = \dfrac{1}{4}\left(U_{n-1} - V_{n-1}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \left(U_{n-2} - V_{n-2}\right)$

$= \dots = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \left(U_0 - V_0\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ 1

3. • $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n + V_n}{2} - U_n = \dfrac{V_n - U_n}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n < 0$

$\Rightarrow (U_n)_n$ est decroissante 1

• $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} - V_n = \dfrac{\frac{U_n + V_n}{2} - V_n}{2} = \dfrac{U_n - V_n}{4} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} > 0$

$\Rightarrow (V_n)_n$ est croissante 1

• $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0 \quad$ car $\quad 0 < \dfrac{1}{4} < 1$ 1

Donc les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes.

• On déduit que les deux suites sont convergentes et qu'elles ont la même limite 1