Université Abou Bekr Belkaïd - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département GEE

Année Universitaire 2020/2021
M2 - ELT - CE - S3
EC_921

Examen semestriel
Techniques d'intelligence artificielle

Exercice 1 (10 points)

Soit un perceptron dont le vecteur de pondération est $\boldsymbol{W} = [\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 1 \quad 1]$.

1. Donner l'équation de la droite séparatrice définie par ce perceptron.
Tracer sur la figure 1, cette droite dans le plan (x_1 ; x_2) et hachurer la surface correspondante à la partie du plan où le perceptron retourne la valeur $y = 1$.

2. Lesquels parmi les perceptrons caractérisés par les vecteurs de pondération suivants ont le même hyperplan et qui retourne exactement le même résultat de classification que le perceptron donné dans la question 1 ?

a) $\boldsymbol{W} = [\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]$
b) $\boldsymbol{W} = [\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [1 \quad -0{,}5 \quad -0{,}5]$
c) $\boldsymbol{W} = [\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [-1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]$
d) $\boldsymbol{W} = [\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [-2 \quad -1 \quad -1]$

3. Quelles sont les valeurs des poids ω_0, ω_1 et ω_2 du perceptron dont la frontière de décision est illustrée sur la figure donnée ci-dessous ?
Y a-t-il plusieurs choix possibles pour ces valeurs de poids ?

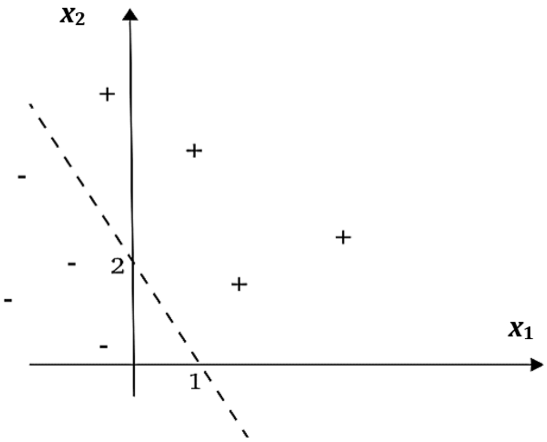


Figure 1

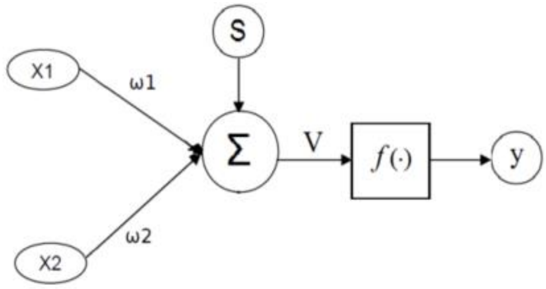


Figure 2

Exercice 2 (10 points)

Soit le neurone formel, représenté sur la figure 2, avec deux entrées x_1 et x_2 et une sortie y, dont l'objectif est de réaliser la fonction logique suivante :

$f(x_1 = 1 ; x_2 = 1) = 1 \qquad f(x_1 = 1 ; x_2 = -1) = 1 \qquad f(x_1 = -1 ; x_2 = 1) = -1 \qquad f(x_1 = -1 ; x_2 = -1) = -1$

Appliquer l'algorithme, basé sur la loi de Hebb, permettant l'actualisation des poids des connexions jusqu'à convergence sur les données d'apprentissage par présentation de la suite d'exemples, dans l'ordre, en initialisant le vecteur de pondération $\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2]$ à $\boldsymbol{W_0} = [0 \quad 0]$.

On prendra la fonction signe comme fonction d'activation, un seuil nul et le coefficient $\mu = 1$.

$$f(V) = +1, \quad \text{si } V > 0 \qquad \text{et} \qquad f(V) = -1, \quad \text{si } V \leq 0$$

Université Abou Bekr Belkaïd - Tlemcen
Faculté de Technologie
Département GEE

Année Universitaire 2020/2021
M2 - ELT - CE - S9
EE_921

Examen semestriel - Corrigé
Techniques d'intelligence artificielle

Exercice 1 10 pts

1. Séparatrice linéaire

Equation de la droite séparatrice définie par le perceptron

L'équation d'une droite peut être écrite sous la forme : $a.x + b.y + c = 0$, ou encore :

$$y = \frac{a}{b}.x - \frac{c}{b}$$

C'est l'équation d'un discriminant linéaire.

En considérant l'expression du potentiel synaptique V et la fonction d'activation $y = f(V)$:

$$y = f(\omega_1.x_1 + \omega_2.x_2 + \omega_0)$$

Avec l'entrée du biais : $x_0 = +1$

par exemple de type signe, on peut écrire :

$$\omega_1.x_1 + \omega_2.x_2 + \omega_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad y = +1$$

$$\omega_1.x_1 + \omega_2.x_2 + \omega_0 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

En posant : $\omega_1.x_1 + \omega_2.x_2 + \omega_0 = 0$, on obtient :

$$x_2 = -\frac{\omega_1}{\omega_2}.x_1 - \frac{\omega_0}{\omega_2}$$

Cette équation s'apparente également à celle du discriminant linéaire, un perceptron peut donc réaliser la séparation d'un ensemble d'exemples en deux classes définies par $y = 1$ et $y = 0$.

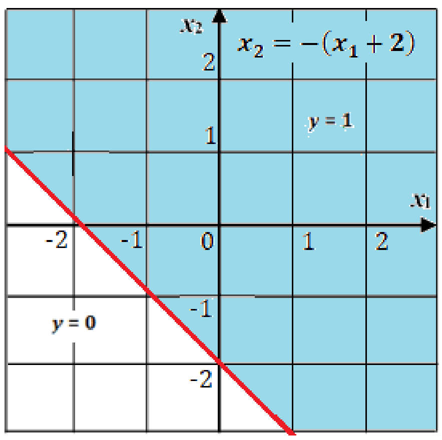
Le vecteur de pondération définissant le perceptron est donné par : $\boldsymbol{W} = [\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 1 \quad 1]$, d'où :

$$x_2 = -\frac{\omega_1}{\omega_2}.x_1 - \frac{\omega_0}{\omega_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{1}.x_1 - \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_1 - 2$$

L'équation de la droite séparant le plan $(x_1 ; x_2)$ en deux classes telles que $y = 1$ et $y = 0$ est donc :

$$\boldsymbol{x_2 = -(x_1 + 2)}$$ 2,0 pts

Tracer cette droite dans le plan (x_1 ; x_2)



2,0 pts

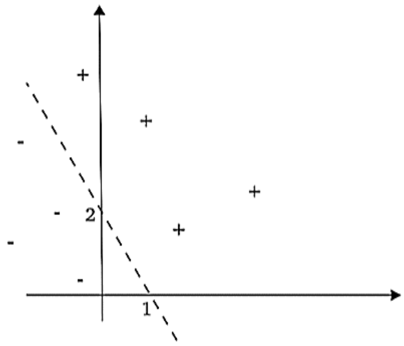
2. Perceptrons retournant exactement la même classification

a.	$[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]$ $x_2 = -\frac{0{,}5}{0{,}5}.x_1 - \frac{1}{0{,}5} = -x_1 - 2$	b.	$[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [1 \quad -0{,}5 \quad -0{,}5]$ $x_2 = -\frac{-0{,}5}{-0{,}5}.x_1 - \frac{1}{-0{,}5} = -x_1 + 2$
c.	$[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [-1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]$ $x_2 = -\frac{0{,}5}{0{,}5}.x_1 - \frac{-1}{0{,}5} = -x_1 + 2$	d.	$[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [-2 \quad -1 \quad -1]$ $x_2 = -\frac{-1}{-1}.x_1 - \frac{-2}{-1} = -x_1 - 2$

Les perceptrons caractérisés par les vecteurs de pondération suivants : ont le même hyperplan et retourne le même résultat de classification que le perceptron de la question 1 :

a) **$[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]$** d) **$[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [-2 \quad -1 \quad -1]$** 1,0 pt + 1,0 pt

3. Séparation définie par la figure 1



Valeurs des poids du perceptron

L'équation de la droite séparant le plan (x_1 ; x_2) en deux classes telles que : $C(y)$= + et $C(y)$ = - est $x_2 = -2 \text{ x } (x_1 - 1)$

On obtient par identification :

$$x_2 = -2x_1 - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{\omega_2} = 2$$

Ce système est satisfait par le jeu de poids suivant :

$$\omega_0 = 1 \qquad \omega_1 = 1 \qquad \omega_2 = 0{,}5$$

$$y = f(\omega_1.x_1 + \omega_2.x_2 + \omega_0) \qquad \Rightarrow \qquad y = f(1.x_1 + 0{,}5.x_2 + 1)$$

$[\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2] = [1 \quad 1 \quad 0{,}5]$ 2,0 pts

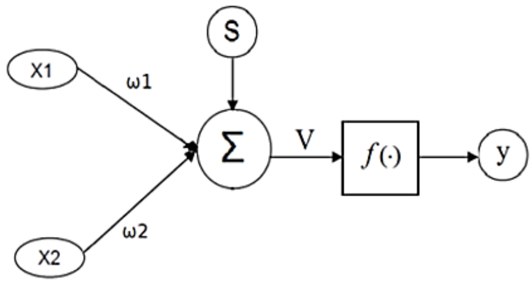
Y a-t-il plusieurs choix possibles pour ces valeurs de poids ?

Il y plusieurs choix possibles, car les exemples sont linéairement séparables. N'importe quelle droite, et donc les poids correspondants, permettant de discriminer les deux classes pourra être choisie. 2,0 pts

Exercice 2 10 pts

Apprentissage basé sur la loi de Hebb

Base d'exemples pour l'apprentissage



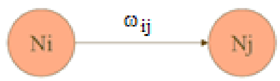
$x = [1 \quad 1]^T \quad y_d = 1$ $\qquad x = [1 \quad -1]^T \quad y_d = 1$

$x = [-1 \quad 1]^T \quad y_d = -1$ $\qquad x = [-1 \quad -1]^T \quad y_d = -1$

Initialisation des poids et du biais :

$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W_0} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [0 \quad 0]$ $\qquad S = 0$ $\qquad \mu = 1$

Règle de Hebb pour la mise à jour des poids synaptiques :



$$\boldsymbol{\omega_{ij}(k+1) = \omega_{ij} . (k+1) + \mu . (x_i . y_j)}$$

Pas 1 - Exemple 1 $x = [1 \quad 1]^T$ et $y_d = 1$ $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W_0} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [0 \quad 0]$ $S = 0$

Potentiel synaptique : $V = 0*1 + 0*1 - 0 = 0$ $y = \text{signe}(0) = -1$ $y \neq y_d$

Donc, il faut ajuster les poids :

$\omega_1 = \omega_1 + \mu\,.\,(x_1\,.\,y) = 0 + 1*(1*1) = 1$ $\omega_2 = \omega_2 + \mu\,.\,(x_2\,.\,y) = 0 + 1*(1*1) = 1$

$\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [1 \quad 1]$ 1,0 pt

---

Pas 2 - Exemple 2 $x = [1 \quad -1]^T$ et $y_d = 1$ $\boldsymbol{W} = [w_1 \quad w_2] = [1 \quad 1]$ $S = 0$

Potentiel synaptique : $V = 1*1 + 1*(-1) - 0 = 0$ $y = \text{signe}(0) = -1$ $y \neq y_d$

Donc, il faut ajuster les poids :

$\omega_1 = \omega_1 + \mu\,.\,(x_1\,.\,y) = 1 + 1*(1*1) = 2$ $\omega_2 = \omega_2 + S\,.\,(x_2\,.\,y) = 1 + 1*(-1*1) = 0$

$\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$ 1,0 pt

---

Pas 3 - Exemple 3 $x = [-1 \quad 1]^T$ et $y_d = -1$ $\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$ $S = 0$

Potentiel synaptique : $V = 2*(-1) + 0*1 - 0 = -2$ $y = \text{signe}(-2) = -1$ $y = y_d$

Donc, pas besoin d'ajuster les poids et on les conserve.

$\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$ 1,0 pt

---

Pas 4 - Exemple 4 $x = [-1 \quad -1]^T$ et $y_d = -1$ $\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$ $S = 0$

Potentiel synaptique : $V = 2*(-1) + 0*(-1) - 0 = -2$ $y = \text{signe}(-2) = -1$ $y = y_d$

Donc, pas besoin d'ajuster les poids et on les conserve.

$\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$ 1,0 pt

---

Pas 5 - Exemple 1 $x = [1 \quad 1]^T$ et $y_d = 1$ $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W_0} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$ $S = 0$

Potentiel synaptique : $V = 2*1 + 0*1 - 0 = 2$ $y = \text{signe}(2) = 1$ $y \neq y_d$

Donc, pas besoin d'ajuster les poids et on les conserve.

$\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$ 1,0 pt

---

Tous les exemples de l'ensemble d'apprentissage ont été testé.

Les poids finaux sont : **$\boldsymbol{W} = [\omega_1 \quad \omega_2] = [2 \quad 0]$**