# Examen final en Robotique (IA 912)
# Correction des questions de cours (7 Pts)

Nom. Prénom ....................................

On considère un robot manipulateur de type série ayant $q \in \mathbb{R}^6$, avec un modèle géométrique direct exprimé en fonction des matrices de transformation homogènes $A_0^6$ et une matrice jacobienne $J(q)^{(6\times6)}$. Vérifier si les suppositions suivantes sur les singularités sont vraies ou fausses et fournir une très courte motivation/explication devant la bonne réponse.

1 Dans une configuration de singularité, il y aura lieu d'infinité de solutions. (1 Pt)

Vraie ■ : En singularité, il y a une perte de degré de l'espace cartesien (redondance).
Fausse □ : ..........................................................................................................................................

2 En singularité, le robot peut instantanément accéder à n'importe quelle articulation (ou bien configuration articulaire). (1 Pt)

Vraie ■ : Il n'y a aucune perte de mobilité en espace articulaire si on n'utilise pas $J^{-1}$
Fausse ■ : Si on utilise $J^{-1}$, quelques articulations tendent vers l'infini, donc pas d'accès

3 Proche de la singularité de $J(q)$, quelques directions cartésiennes ne sont pas accessibles. (1 Pt)

Vraie ■ : Ceci est vrai que en singularité et non proche de singularité
Fausse □ : ..........................................................................................................................................

4 En singularité, les vitesses angulaires $\omega$ de l'effecteur final sont linéairement dépendants aux vitesses linéaires $v$. (1 Pt)

Vraie □ : ..........................................................................................................................................
Fausse ■ : Pas forcement, il dépend de la relation entre $J(\omega)$ et $J(v)$.

5 En singularité, $\mathcal{R}(J) \oplus \mathcal{N}(J) \neq \mathbb{R}^6$ : ( dimension de l'image de $J$ plus la dimension du noyau de $J$ différent à 6). (1 Pt)

Vraie □ : ..........................................................................................................................................
Fausse ■ : La somme des deux espaces mène à la dimension complet qui est 6.

Trouver la matrice de transformation homogène $H$ résultante d'une orientation d'un angle $\alpha$ autour de l'axe $x$ suivie d'une translation d'une quantité $a$ au long de l'axe $x$ du repère actuel suivie d'une translation d'une quantité $b$ au long de l'axe $z$ du repère d'origine suivie d'une rotation d'un angle $\beta$ autour de l'axe $z$ du repère d'origine. (2 Pts)

$$H = \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & -c\alpha s\beta & s\alpha s\beta & ac\beta \\ s\beta & c\alpha c\beta & -c\beta s\alpha & as\beta \\ 0 & s\alpha & c\alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Correction de l'exercice (13 Pt)

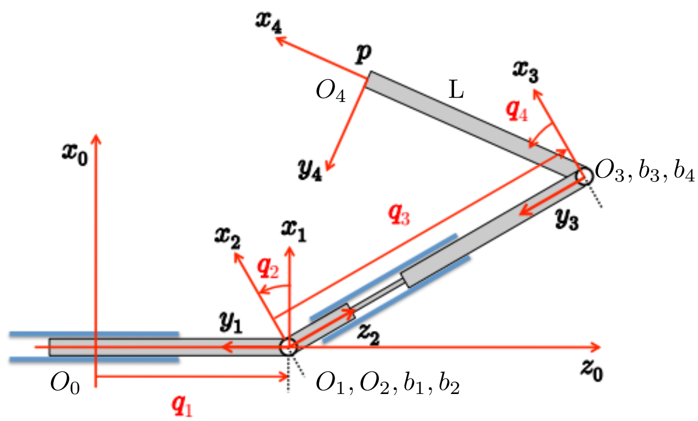


Figure 1: Robot PRPR

1- Tableau de D-H (4 Pts)

| Joint | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $J_1$ | 0 | $q_1$ | 0 | $\frac{-\pi}{2}$ |
| $J_2$ | $q_2$ | 0 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $J_3$ | 0 | $q_3$ | 0 | $\frac{-\pi}{2}$ |
| $J_4$ | $q_4$ | 0 | L | 0 |

2- Matrices de transformation homogènes (2 Pts)

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_1^2 = \begin{bmatrix} cq_2 & 0 & sq_2 & 0 \\ sq_2 & 0 & -cq_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_3^4 = \begin{bmatrix} cq_4 & -sq_4 & 0 & L.cq_4 \\ sq_4 & cq_4 & 0 & L.sq_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modèle géométrique direct est calculé à partir de la multiplication de ces matrices de transformation homogènes:

$$H_0^4 = H_0^1.H_1^2.H_2^3.H_3^4 = \begin{bmatrix} & R_0^4 & & p_0^4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0^4 = f(q) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \sin(q_2) + L\cos(q_2+q_4) \\ 0 \\ q_1 + q_3\cos(q_2) - L\sin(q_2+q_4) \end{bmatrix} (2Pts)$$

3- La Jacobienne. Il y a deux manières pour calculer $J$, ou bien par la dérivée de $P_0^4$ c'est le jacobien analytique ou bien on utilise le jacobien géométrique puisqu'on a déjà calculé les $H_{i-1}^i$.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \\ \frac{\partial p_z}{\partial q_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & q_3\cos(q_2) - L\sin(q_2+q_4) & \sin(q_2) & -L\sin(q_2+q_4) \\ 1 & -q_3\sin(q_2) - L\cos(q_2+q_4) & \cos(q_2) & -L\cos(q_2+q_4) \end{bmatrix} (2Pts)$$

4- $J$ est de rang complet si $rang(J) = min(2,4) = 2$. Donc, pour qu'elle ne soit pas de rang complet, il faut que le $rang(J) < 2$ exemple $rang(J) = 1$. Pour cela il faut que toutes les colonnes soient parallèles à la première colonne, c-à-d $[0,1]^T$. Pour avoir ça, il faut que $q_2 = q_3 = q_4 = 0$ et que $q_1 \in \mathbb{R}$. (1 Pt)

5- Pour $q_2 = q_4 = \pi/2$ et $q_3 = 0$, on a :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & 0 & L \end{bmatrix}$$

$v$ est un noyau de $J$, si $J.v = 0$, exemple de base de $v$ est: (1 Pt)

$$v = \begin{bmatrix} -2L \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6- $q_3$ et $q_4$ deviennent constants, c-à-d que notre $J$ se réduit à une matrice $(2 \times 2)$ (1 Pt)

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -L\sin(q_2 + q_4) \\ 1 & -L\cos(q_2 + q_4) \end{bmatrix}$$

avec $q_3 = 0$ et $q_4 \in \mathbb{R}$. Pour que $J$ évite les singularités, il faut que:

$$det(J) \neq 0 \Rightarrow \sin(q_2 + q_4) \neq 0 \Rightarrow q_2 \neq k\pi - q_4$$