جامعة تلمسان
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية

المدة: ساعة واحدة

AS-ES-NS 311

اختبار السداسي الاول في مقياس الرياضيات 3

Exercice obligatoir تمرين اجباري (06 pts)

1) Vérifier que la fonction : $U(x,y) = (x-y)(x+y)$ est une solution de l'edp : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

2) Donner la classification de l'edp : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad / U = U(x,y)$.
(Faire un dessin / يجب تدعيم الإجابة بالرسم)

Il doit choisir 2 exercices: يجب اختيار تمرينين :

Ex01 (07 pts) : Résoudre : $y' - 2y = x e^x \; ; \; y(0) = 2$

Ex02 (07 pts) : 1) Etudier la nature de l'intégrale impropre suivante : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

2) Calculer : $\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1 + (2t)^2}$

Ex03 (07 pts) : Calculer : $L\left[t^4 + e^{-2t}\right](p) \quad ; \quad L^{-1}\left[\frac{p}{(p+1)(p+2)}\right] \qquad p > 0$

L : La transformation de Laplace , L^{-1} : La transformation de Laplace inversée.

Ex04 (07 pts) : Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$; 2) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$

Exo1 (07 pts): Résoudre : $y' - 2y = xe^x$; $y(0) = 2$

ESSM : $y' - 2y = 0$

$$y_0 = C_1 \exp\left(-\int -2\,dx\right) \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y_0 = Ce^{+2x}} \quad 2,5 \qquad C \in \mathbb{R}$$

EASM : le 2^{nd} membre $= xe^x$ de la forme : $P_1(x)e^x$

donc la solution particulière : $y_p = (ax+b)e^x$ 0,5

$y_p' = ae^x + (ax+b)e^x$ 0,5

$$y_p' - 2y_p = (ax + a + b)e^x - 2(ax+b)e^x = xe^x \quad 0,5$$

on a $-ax + a - b = x$

par identification on obtient : $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$ 0,5 $\quad \boxed{a = -1}$ 0,5 $\quad \boxed{b = -1}$ 0,5

$$y_p = -(x+1)e^x$$

$$y = y_p + y_0 = -(x+1)e^x + Ce^{2x} \quad 0,5$$

$$y(0) = -1 + C = 2 \quad 1$$

$$\boxed{C = 3}$$

La sol générale : $\boxed{y = 3e^{2x} - (x+1)e^x}$

Exercice obligatoir تمرين اجباري (06 pts)

1) vérifier que la fonction : $U(x,y) = (x-y)(x+y)$ est une solution de l'edp : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ... (1)

2) Donner la classification de l'edp : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ / $u = u(x,y)$.

(Faire un dessin / يجب تدعيم الإجابة بالرسم)

1) On a $U(x,y) = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ (1)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ (1)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$ (0,5)

donc $U(x,y)$ est une sol de (1)

2) La classification de l'edp : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ... (2) $\quad u = u(x,y)$

$\Delta = B^2 - 4AC = 4x$ (0,5)

- si $x > 0 \Rightarrow 4x > 0$

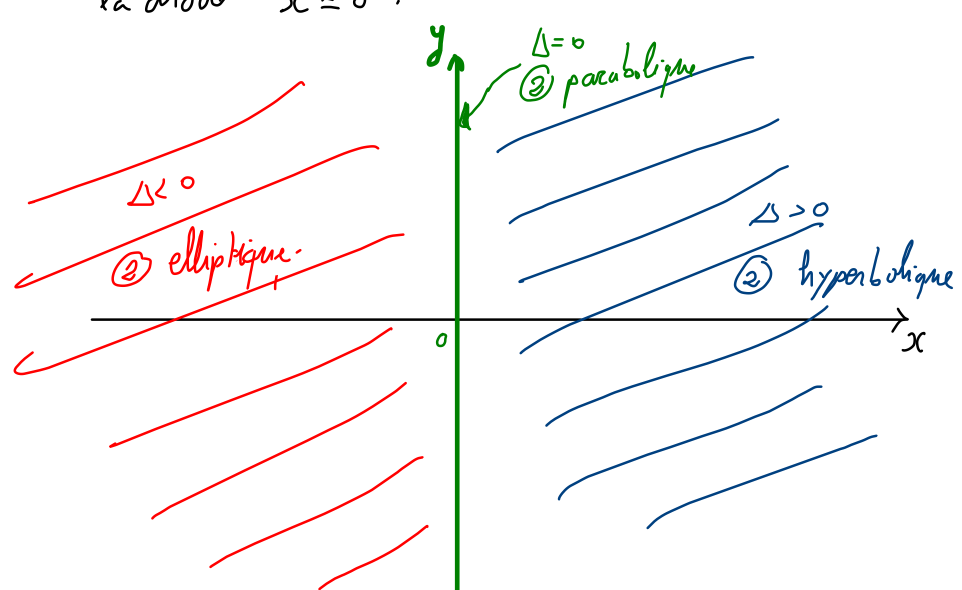
Alors : l'edp (2) est hyperbolique sur le demi plan situé à droite de la droite $x = 0$ (l'axe des y) (0,5)

- si $x = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Alors : l'edp (2) est parabolique sur l'axe des y. (0,5)

- si $x < 0 \Rightarrow \Delta < 0$ (0,5)

Alors : l'edp (2) est elliptique sur le demi plan situé à gauche de la droite $x = 0$.



(1,5)

Ex 02 (07 pts): 1) Etudier la nature de l'intégrale impropre suivante : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

2) Calculer : $\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+(2t)^2}$

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1/2}}$ est une intégrale de Riemann diverge car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ (2,5)

2) $I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+(2t)^2} = \lim_{y \to -\infty} \underbrace{\int_y^{0} \frac{dt}{1+(2t)^2}}_{I_y}$

On fait le changement de variable suivant : $x = 2t$ (0,5) $\Leftrightarrow dx = 2dt$ (0,5)

$t = 0 \Rightarrow x = 0$

$t = -\infty \Rightarrow x = -\infty$

$$I_y = \int_y^{0} \frac{\frac{dx}{2}}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_y^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_y^{0}$$ (0,5) (1)

$$= \frac{1}{2}\left[-\operatorname{arctg}(y)\right]$$ (0,5)

$$I_2 = \lim_{y \to -\infty} I_y = \lim_{y \to -\infty}\left(\frac{1}{2}\left[-\operatorname{arctg}(y)\right]\right)$$ (0,5)

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

donc $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}}$ (1)

Exo3 (07 pts) : Calculer : $L\left[t^4+e^{-2t}\right](p)$; $L^{-1}\left[\dfrac{p}{(p+1)(p+2)}\right]$ $p>0$

L : La transformation de Laplace , L^{-1} : La transformation de Laplace inversée .

1) $L\left[t^4+e^{-2t}\right](p) \overset{L \text{ : linéaire}}{=} L\left[t^4\right](p)+L\left[e^{-2t}\right](p)$

$$= \frac{4!}{p^5}+\frac{1}{p+2}$$

2,5

2) $L^{-1}\left[\dfrac{p}{(p+1)(p+2)}\right]$

On décompose en éléments simples le fraction rationnel : $\dfrac{p}{(p+1)(p+2)}$

$$\frac{p}{(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p+1}+\frac{b}{p+2}$$

0,5

$$= \frac{a(p+2)+b(p+1)}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{(a+b)p+2a+b}{(p+1)(p+2)}$$

par identification on a : $\begin{cases} a+b=1 & \text{...(1)} \\ 2a+b=0 & \text{...(2)} \end{cases}$ 0,5

de (2) : $b=-2a$ ---(3)

(3) ds (1) $a-2a=1$

$\boxed{a=-1}$ 0,5

$\boxed{b=2}$ 0,5

Fonction	Transformée de Laplace et inverse
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
$e^{-c.t}$	$\frac{1}{p+c}$
$\sin(a.t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(a.t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$

$$\frac{p}{(p+1)(p+2)} = \frac{-1}{p+1}+\frac{2}{p+2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{p}{(p+1)(p+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{-1}{p+1}+\frac{2}{p+2}\right] \overset{L^{-1} \text{ : linéaire}}{=} -L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right]$$

0,5

$$= -e^{-t}+2e^{-2t} = 2e^{-2t}-e^{-t}$$

0,5

$$L^{-1}\left[\frac{p}{(p+1)(p+2)}\right] = 2e^{-2t}-e^{-t}$$

1,5

Exo4 (07 pts) : Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; 2) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ est une série de Riemann : $\begin{cases} CV & \text{si } \alpha+1>1,\ \alpha>0 \quad (1) \\ dV & \text{si } \alpha+1\leq 1,\ \alpha\leq 0 \quad (1) \end{cases}$

2) $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}}_{U_n}$

On utilise le critère de Cauchy :

$$\lim_{+\infty} \sqrt[n]{U_n} \ (0,5) = \lim_{+\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{+\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n} \ (0,5) = \lim_{+\infty} \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}\right)^{n} \ (0,5)$$

$$= \lim_{+\infty} \left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}\right] \ (0,5)$$

$$(0,5) = \frac{e^1}{e^3} = e^{-2} < 1 \ (1)$$

donc la série est convergente. (1)