Sujet Examen matière Ondes Vibrations 2021

! Choisir et résoudre 2 exercices obligatoires parmi les 4 exercices ci-dessous

Exercice 1 *(10 points)*

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure 1.

La tige rigide mM de longueur 2ℓ ($Om = OM = \ell$), de masse négligeable porte à ses extrémisées les masses ponctuelles m et M. Les 2 ressorts identiques sont soudés en un point A à la tige ($OA = a$).

Au repos ($\theta = 0$) le système est symétrique par rapport à la verticale et les ressorts non déformés.

La tige écartée d'un angle θ, les ressorts déformés de x, le système oscille dans le plan de la figure autour de l'axe de rotation O.

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système en fonction de θ .
2) Grâce à la méthode de Lagrange, établir l'équation différentielle du mouvement.
3) Dans le cas des petites oscillations, trouver l'équation différentielle du mouvement et sa solution $\theta(t)$.
   Pour $m = M$ et $a = \ell / 2$, en déduire la période des oscillations.

Exercice 2 *(10 points)*

1) Etablir l'équation différentielle en courant puis en charge du circuit oscillatoire électrique de la figure 2.

On donne : $R = 12$ Ohm , $L = 2$Henry, $C = 0{,}02$Farad, $U(t) = U_o \cos\Omega t$, $\Omega = 2$rd/s , $U_o = 40$Volts

Calculer la période propre T_o et le coefficient d'amortissement γ. En déduire l'équation complète.

2) Déterminer la solution du régime transitoire, et en déduire sa pseudo pulsation ω.
3) Déterminer la solution du régime permanente.

Exercice 3 *(10 points)*

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure 3.

Les 2 cylindres de même masse M, de même rayon R et de même moment d'inerties $J = ½ MR^2$, roulent sans glisser (c'est-à-dire que lorsqu'ils tournent respectivement de θ_1 et θ_2 , leurs centres de gravité se déplacent respectivement de $x_1 = R\theta_1$ et $x_2 = R\theta_2$).

1) Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système (on choisira x_1 et x_2 comme variables = degrés de libertés.)
2) Etablir le Lagrangien pour $k_1 = k_2 = k$. En déduire le système d'équations différentielles.
3) Trouver les pulsations propres correspondantes aux modes de vibrations possibles.
4) En déduire la matrice de passage et écrire les solutions générales.

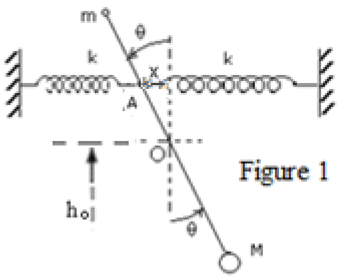


Figure 1

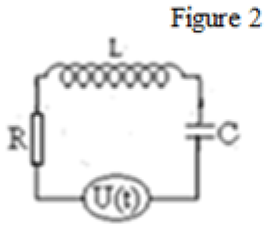


Figure 2

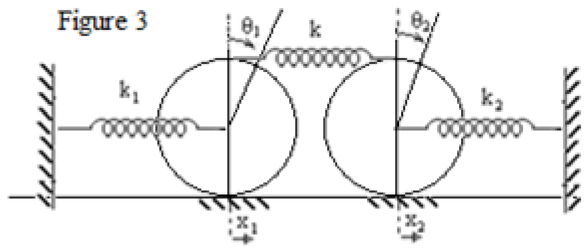


Figure 3

Exercice 4 *(10 points)*

Soit 2 champs électriques $\vec{E1} \left\{ \begin{array}{l} 10.\sin(10^8 t - k.z) \\ 10.\cos(10^8 t - k.z) \\ 0 \end{array} \right.$ et $\vec{E2} \left\{ \begin{array}{l} 10.\sin(10^8 t - k.z) \\ -10.\cos(10^8 t - k.z) \\ 0 \end{array} \right.$

1) Quelles sont la nature, la direction de propagation, la période T, la longueur d'onde λ et le nombre d'onde k des 2 champs.
2) Quelles sont les sens de leurs polarisations.
3) Déterminer le champ électrique E résultant.
   Quelle est sa nature, sa direction de propagation et le sens de sa polarisations.
4) Déterminer le champ magnétique H correspondant à E.
   Quelle est sa nature, sa direction de propagation et le sens de sa polarisation.

On rappel que : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\delta \vec{B}}{\delta t}$; $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$

Réponses Examen matière Ondes Vibrations 2021

Réponse 1

$T =$ Ec du système $= \frac{1}{2} J_M \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m+M)\ell^2\dot{\theta}^2$ ***1,5 pt***

$V =$ Ep des 2 ressorts + Ep des 2 masses $= 2.\frac{1}{2} k x^2 + mg\ell\cos\theta - Mg\ell\cos\theta$ + constante ***1,5 pt***

$x = a\sin\theta$; $L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\ell^2\dot{\theta}^2 - k(a.\sin\theta)^2 + (M-m)g\ell\cos\theta$ ***1 pt***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 = (m+M)\ell^2\ddot{\theta} + 2ka^2\sin\theta\cos\theta + (M-m)g\ell\sin\theta$$ ***2 pts***

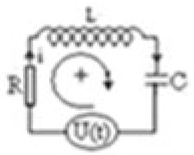
pour les petites oscillations : $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k.a^2 + (M-m)g\ell}{(m+M)\ell^2}\right)\theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$ ***1,5 pt***

la solution est un MHS $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0^2 = \frac{2k.a^2 + (M-m)g\ell}{(m+M)\ell^2}$ ***1,5 pt***

$$\begin{matrix} m = M \\ a = \frac{\ell}{2} \end{matrix} \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$ ***1 pt***

Réponse 2

1) 

loi des mailles $\sum d.d.p = \sum f.e.m \longrightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = U(t)$ ***1,5 pt***

$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ $\quad q = \int i\,dt$ $\quad \frac{di}{dt} = \ddot{q} \longrightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U(t)}{L}$ ***1,5 pt***

$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L}\cos\Omega t \longrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 25$ $\quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}25$ $\quad \gamma = \frac{R}{2L} = 3$ ***1 pt***

équation complète: $\ddot{q} + 6\dot{q} + 25q = 20\cos 2t$

2) $q_g = q_{ssm} + q_p$; q_{ssm} = régime transitoire = solution de $\ddot{q} + 6\dot{q} + 25q = 0$

$\Delta' = \gamma^2 - \omega_0^2 = 9 - 25 = -16 < 0 \longrightarrow$ régime oscillatoire amorti $q_{ssm} = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$

$\Delta' = -\omega^2 \longrightarrow \omega = 4$ rd/s $\longrightarrow q_{ssm} = Ce^{-3t}\cos(4t - \varphi)$ ***2 pts***

3) q_p = régime permanent = solution particulière du même type que le 2ème membre $= Q\cos(2t + \phi)$ ***1 pt***

q_p est solution de l'éq. diff. donc xp vérifi l'éq. diff. : $\ddot{q} + 6\dot{q} + 25q = 20\cos 2t$

écriture complexe: $\begin{matrix}\cos 2t \\ q_p = Q\cos(2t+\phi)\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} e^{i2t} \\ \bar{q}_p = Q\,e^{i(2t+\phi)} = \bar{Q}\,e^{i2t}\end{matrix}$ avec $\bar{Q} = Q\,e^{i\phi}$

$\longrightarrow (-4 + i12 + 25)\,\bar{Q} = 20$ ***1 pt*** $\longrightarrow$ $Q = \frac{20}{\sqrt{21^2 + 12^2}} = 0{,}8$ ***1 pt***

$\phi = -\text{arctg}\,\frac{12}{21} = -29{,}7^0 = -0{,}5$ rd

$q_p = 0{,}8\cos(2t - 0{,}5)$ ***1 pt*** $\quad q_g = q_{ssm} + q_p = Ce^{-3t}\cos(4t - \varphi) + 0{,}8\cos(2t - 0{,}5)$

Réponse 3

1) $T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2$ $\quad J=\frac{1}{2}MR^2$ $\quad \begin{matrix} x_1=R\theta_1 \\ x_2=R\theta_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1=R\dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2=R\dot{\theta}_2 \end{matrix}$

$\longrightarrow T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}_2^2=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{4}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2+\frac{1}{4}M\dot{x}_2^2=\frac{3}{4}M(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)$ ***1,5 pt***

$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+\frac{1}{2}k\left[(x_1+R\theta_1)-(x_2+R\theta_2)\right]^2+2Mgh_0$

$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+2k(x_1-x_2)^2+$ constante ***1,5 pt***

2) $k_1=k_2=k$ $\quad L=T-V=\frac{3}{4}M(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}k(5x_1^2+5x_2^2-8x_1x_2)$ ***1 pt***

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}_{1,2}}\right)-\frac{\delta L}{\delta x_{1,2}}=0 \longrightarrow \begin{matrix} \frac{3}{2}M\ddot{x}_1+5kx_1-4kx_2=0 \\ \frac{3}{2}M\ddot{x}_2+5kx_2-4kx_1=0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \ddot{x}_1+\frac{10k}{3M}x_1-\frac{8k}{3M}x_2=0 \\ \ddot{x}_2+\frac{10k}{3M}x_2-\frac{8k}{3M}x_1=0 \end{matrix}$ ***2 pts***

3) les solutions du type $\bar{x}_{1,2}=\bar{X}_{1,2}e^{i\omega_0 t} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\omega_0^2+\frac{10k}{3M} & -\frac{8k}{3M} \\ -\frac{8k}{3M} & -\omega_0^2+\frac{10k}{3M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ***1 pt***

$\longrightarrow \det=\left[-\omega_0^2+\frac{10k}{3M}\right]^2-\left[\frac{8k}{3M}\right]^2=0=\left[-\omega_0^2+\frac{18k}{3M}\right]\left[-\omega_0^2+\frac{2k}{3M}\right] \longrightarrow$ pulsations propres $\begin{matrix}\omega_{01}^2=\frac{18k}{3M}\\ \omega_{02}^2=\frac{2k}{3M}\end{matrix}$ ***1 pt***

4) mode 1 $\omega_{01}^2=\frac{18k}{3M} \longrightarrow \frac{8k}{3M}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow$ vecteur propre $\vec{V}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ matrice de passage

mode 2 $\omega_{02}^2=\frac{2k}{3M} \longrightarrow \frac{8k}{3M}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow$ vecteur propre $\vec{V}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ ***1,5 pt***

sultions générales $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X_1\cos(\omega_{01}t+\varphi_1)\\ X_2\cos(\omega_{02}t+\varphi_2)\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1(t)=X_1\cos(\omega_{01}t+\varphi_1)+X_2\cos(\omega_{02}t+\varphi_2) \\ x_2(t)=-X_1\cos(\omega_{01}t+\varphi_1)+X_2\cos(\omega_{02}t+\varphi_2)\end{matrix}$ ***0,5 pt***

remarque: Les constantes A_1 A_2 φ_1 et φ_2 sont déterminées grâce aux Conditions Initiales

Réponse 4

1) $\vec{k}\vec{r} = k\vec{u}\,\vec{r} = k.z \rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{k}}{k} = \vec{k} \rightarrow \vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ champs électriques d'ondes sinusoïdales planes se propageant suivant l'axe des z ***1 pt***

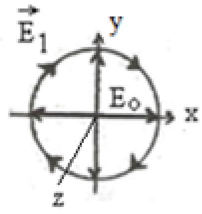
$\omega = 10^8 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi 10^{-8}$ s $\qquad \lambda = T\,c = 2\pi 10^{-8}\; 3\;10^8 = 6\pi$ m $\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{3}$ m^{-1} ***1,5 pt***

2) on fixe le plan d'onde à z = 0 $\rightarrow$ polarisation

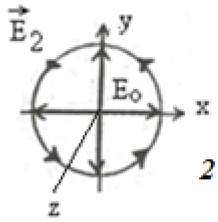
	ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
	t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$3\frac{T}{4}$	T
$\vec{E}_1$	E_{1x}	0	10	0	-10	0
	E_{1y}	10	0	-10	0	10
$\vec{E}_2$	E_{2x}	0	10	0	-10	0
	E_{2y}	-10	0	10	0	-10

sens de polarisation

circulaire droite



circulaire gauche



2 pts

$\rightarrow \vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ ont une polarisation circulaire

remarque: $\left|\vec{E}_1\right| = \sqrt{E_{1x}^2 + E_{1y}^2} = 10 = \sqrt{E_{2x}^2 + E_{2y}^2} = \left|\vec{E}_2\right| =$ constant

3) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \begin{cases} 20\sin(10^8 t - \frac{z}{3}) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

champ électrique sinusoïdal d'une onde plane ***2 pts***

se propage dans la direction des z $\quad \vec{u} = \vec{k}$

et polarisation rectiligne suivant l'axe des x $\quad \vec{v} = \vec{i}$

4)

$$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\delta}{\delta z}E_x\,\vec{j} = -\frac{20}{3}\cos(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$$ ***1,5 pt***

$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{H} = 4\pi\,10^{-7}\,\vec{H} = \frac{20}{3 10^8}\sin(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{1}{6\pi}\sin(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j}$$ ***1 pt***

champ magnétique sinusoïdal d'une onde plane se propage dans la direction $\vec{u} = \vec{k}$

et polarisation rectiligne suivant l'axe des y $\quad \vec{v} = \vec{j}$ ***1 pt***