Examen du premier Semestre : 20020-2021	Parcours : licence L2
Matière : ONDES ET VIBRATIONS	Code : PHY3

Exercice 1.

soit un système décrit par l'équation suivante :

$$1.25\,\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + 5x = 0$$

avecα est une constante réelle.

1. discuter en fonction de α la nature et les différents régimes du système.
2. on suppose que $\alpha = 2$, donner l'expression de $x(t)$
3. sachant que $t = 0$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$, donner l'expression exacte de $x(t)$

Exercice 2.

h Soit le système mécanique illustré sur la figure 2. Le système est constitué d'une tige de masse négligeable et de longueur. Deux objets de masse m sont reliés aux extrémités de la tige. Aux points A et B sont attachés deux ressorts de raideurs K_1 etK_1.Un amortisseur de coefficient de frottement β est relié à la tige au point E.

1. Déterminer l'équation du mouvement.

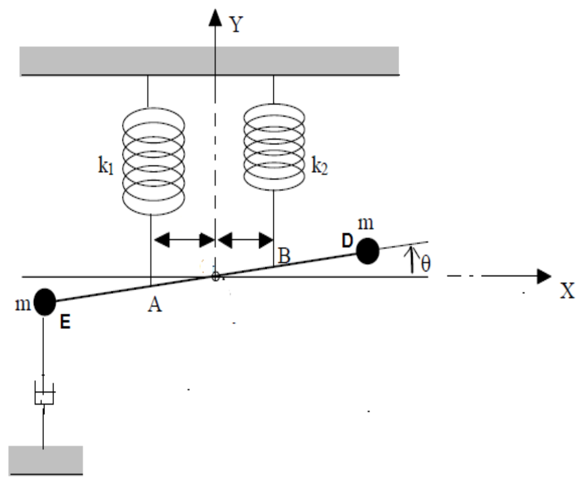

Figure 2

Corrigé type

Exercice 1.

1. L'équation $1.25\,\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + 5x = 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{x} + 1.6\alpha\dot{x} + 4x = 0$$

- **Pour $\alpha = 0$**

  Nous avons l'équation $\ddot{x} + 4x = 0$ qui correspond à un oscillateur libre amorti.

- **Pour $\alpha \neq 0$**

  Nous avons trois régimes selon le signe du déterminantΔ.

$$\Delta = (1.6\alpha)^2 - 16$$

  - Régime pseudopériodique : $\Delta < 2.5$
  - Régime apériodique : $\Delta > 2.5$
  - Régime critique : $\Delta = 2.5$

2. **Pour $\alpha = 2$**

   $\boldsymbol{\alpha = 2}$ correspond au régime pseudopériodique :

   $x(t) = X_0 e^{-\xi t} cos(\omega t + \emptyset)$

   Par analogie, nous avons : $\xi = 1.6\ (SI)$

   $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$

   $\omega = 1.2\ (SI)$

Nous avons$x(0) = X_0 cos(\emptyset) = 0$. Ce qui donne : $\begin{cases} \emptyset = \frac{\pi}{2} \\ \emptyset = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$

Nous avons aussi : $\dot{x}(t) = X_0(-\xi)e^{-\xi t}cos(\omega t + \emptyset) - X_0(\omega)e^{-\xi t}sin(\omega t + \emptyset)$.

Ce qui donne : $\dot{x}(0) = -X_0(\omega)sin(\emptyset) = 2$

Ce qui implique que : $X_0 = \frac{-2}{\omega sin\,(\emptyset)}$

$$X_0 = \begin{cases} -1.67\ si\ \emptyset = \frac{\pi}{2} \\ +1.67\ si\ \emptyset = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{cases} x(t) = -1.67\ e^{-1.6t}cos(1.2t + \frac{\pi}{2}) \\ \qquad\qquad \boldsymbol{ou} \\ x(t) = +1.67\ e^{-1.6t}cos(1.2t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Exercice2.

1. L'équation de mouvement.

a. l'énergie cinétique.

- $E_c = E_{cD} + E_{cE}$

Tel que : $\begin{cases} E_{cD} \text{ est lénergie cinétique de la masse } D \\ E_{cE} \text{ est lénergie cinétique de la masse } E \end{cases}$

- $E_c = \frac{1}{2} m_D v_D^2 + \frac{1}{2} m_E v_E^2$
- Avec $\begin{cases} v_D \text{ est la vitesse de la masse } D \\ v_E \text{ est la vitesse de la masse } E \end{cases}$
- On exprime les cordonnées de deux masse en fonction de l'angle θ :
- $E = \begin{cases} -\frac{l}{2}\cos\theta \\ -(l/2).\sin\theta \end{cases}$
- $D = \begin{cases} +\frac{l}{2}\cos\theta \\ +(l/2).\sin\theta \end{cases}$
- On calcule les dérivés les cordonnées de deux masse en fonction en fonction du temps t :
- $v_E = \begin{cases} \frac{l}{2}\dot{\theta}.\sin\theta \\ -\left(\frac{l}{2}\right).\dot{\theta}.\cos\theta \end{cases}$
- $v_D = \begin{cases} -\frac{l}{2}\ .\dot{\theta}.\sin\theta \\ \left(\frac{l}{2}\right).\dot{\theta}.\cos\theta \end{cases}$
- Donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m_D [(l.\ \dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-l.\dot{\theta}\sin\theta)^2] + \frac{1}{2} m_E [(\frac{l}{2}\dot{\theta}.\sin\theta)^2 + (\left(\frac{l}{2}\right).\dot{\theta}.\cos\theta)^2]$$

$$E_c = \frac{1}{2}(m)(\frac{l}{2}.\ \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(m)(\frac{l}{2}.\ \dot{\theta})^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{4}.m.l^2.\dot{\theta}^2}$$

b. L'énergie potentielle.

- $E_p = E_{pA} + E_{pB}$

  Tel que : $\begin{cases} E_{pA} \text{ est } l'\text{énergie potentielle du ressort attaché au point } A \\ E_{pB} \text{ est } l'\text{énergie potentielle du ressort attaché au point } B \end{cases}$

- $E_p = \frac{1}{2} k\Delta x_A^2 + \frac{1}{2} k\Delta x_B^2$

  Avec $\begin{cases} \Delta x_A l' \text{allongement du ressort attaché au point } A \text{ par rapport à } l'\text{étatd'équilibre} \\ \Delta x_B l' \text{allongement du ressort attaché à au point } B \text{ par rapport à } l'\text{étatd'équilibre} \end{cases}$

- $E_p = \frac{1}{2} k(+\frac{l}{4}.\sin\theta)^2 + \frac{1}{2} k(-\frac{l}{4}.\sin\theta)^2$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{16} kl^2 \sin\theta^2}$$

c. L'équation du mouvement

- $\frac{dL}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = -\frac{d\emptyset}{d\dot{\theta}}$

  Avec $L = \frac{1}{4}.m.l^2.\dot{\theta}^2 - \frac{1}{16}.k.l^2.\sin\theta^2$

- $\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) = \frac{1}{4}.m.l^2.\dot{\theta}$
- $\frac{dL}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}.m.l^2.\ddot{\theta}$
- $\frac{dL}{d\theta} = -\frac{1}{8}.k.l^2.\cos\theta.\sin\theta$

- $\frac{dL}{d\theta} \approx -\frac{1}{8}.k.l^2.\theta$

$$\frac{1}{2}.m.l^2.\ddot{\theta} + \frac{1}{8}.k.l^2.\theta = -\frac{\boldsymbol{d\emptyset}}{d\dot{\theta}}$$

$$\frac{1}{2}.m.l^2.\ddot{\theta} + \frac{1}{8}.k.l^2.\theta = -\frac{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\frac{1}{2}\beta v_E{}^2})}{d\dot{\theta}}$$

$$\frac{1}{2}.m.l^2.\ddot{\theta} + \frac{1}{8}.k.l^2.\theta = -\frac{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\frac{1}{2}\beta}(\frac{l}{2}.\ \dot{\theta})^2)}{d\dot{\theta}}$$

$$\frac{1}{2}.m.l^2.\ddot{\theta} + \frac{1}{4}.\boldsymbol{\beta}.l^2.\dot{\theta} + \frac{1}{8}.k.l^2.\theta = 0$$