Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen Année universitaire : 2020/2021

Faculté des sciences techniques

Département GBM

Corrigé de l'épreuve finale GB111 Durée 1 heure

Question de cours : **(3points)**

Formules d'Euler : $cos\ \theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\ \theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (0.5+0.5)

$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{i3\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{8i^3}$ (0.5+0.5)

$\sin^3\theta = \frac{\frac{e^{i3\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}{-4}$ (0.5)

$\sin^3\theta = \frac{\sin 3\theta - 3\sin\theta}{-4}$ (0.5)

Exercice1 : **(5points)**

Soient p une proposition vraie et q une proposition quelconque.

1- La valeur de vérité de chacune des propositions :

a- $\bar{p} \wedge q$ Fausse : $\bar{p}$ est fausse relié à q par le connecteur ∧ . (1pt)

b- $p \vee \bar{p}$ Vraie (Toujours vraie) : p est vraie relié à $\bar{p}$ par le connecteur ∨. C'est une tautologie (0.5+0.5)

c- $\bar{p} \Rightarrow q$ Vraie : $\bar{p}$ est fausse et le faux implique le vraie ou le faux (1pt)

d- $\overline{p \wedge \bar{p}} \vee q$ Vraie : $p \wedge \bar{p}$ est toujours fausse donc $\overline{p \wedge \bar{p}}$ est toujours vraie. C'est une tautologie (0.5+0.5)

2- La négation de chacune des propositions

$\overline{\bar{p} \wedge q} \Leftrightarrow p \vee \bar{q}$ $\overline{p \vee \bar{p}} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge p$ $\overline{\bar{p} \Rightarrow q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ $\overline{\overline{p \wedge \bar{p}} \vee q} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{p}) \wedge \bar{q}$ (
(0.25+0.25+0.25+0.25)

Exercice2 : **(6points)**

Soit le nombre complexe $a = 3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$.

1- $|a| = 3$ On a : $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$ 0.5+0.5+0.5

Donc $a = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $et\ arg(a) = \frac{\pi}{6}$ et $a = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0.25+0.25

2- $\bar{a} = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $a^2 = 9e^{i2\frac{\pi}{6}} = 9e^{i\frac{\pi}{3}}$ $ia = e^{i\frac{\pi}{2}}.3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$. 0.5+0.5+0.5+0.5

3- Les racines carrées de a , sont les $z_k = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)}$, $k = 0,1$ 1point

D'où $z_0 = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}\ et\ z_1 = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$ 0.5+0.5

Exercice3 : **(6points)**

Soit la suite numérique (u_n) : $u_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}$

1- $u_2 = \frac{1}{2.3}$, $u_3 = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}$. 0.25+0.25

2- Monotonie de la suite (u_n):

$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{(n+1).(n+2)}\right) - \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ 0.25+0.25

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1).(n+2)} > 0$ et on a : $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} - u_n > 0$ 0.25+0.25

La suite (u_n) est strictement croissante.

3- $u_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}$

$u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ 1.5 point

$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$ 0.5

D'où $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*$, $u_n < \frac{1}{2}$. La suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$ 0.5

La suite (u_n) est croissante et est majorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc convergente. 1point

4- $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}.$ 1point

Bonne chance