Université Aboubekr Bekaid
Faculté de Technologie
Dépt GEE, GB M L2

Examen de Probabilités-Statistiques
GB341, NS341

AU 2020-2021
Duré 1h
04/03/2021

Nom et Prénoms: Hrabet Nadjia GBM électronique x groupe x

Corrigé de l'examen

Exercice 1 9 pts

1) Compléter le tableau de la série statistique X suivante :

1pt

Classe C_i	centrec_i	n_i	f_i	n_i^c	f_i^c	$f_i c_i$	$f_i c_i^2$	
[0 ; 2[	1	10	0.1	10	0,1	0.1	0,1	
[2; 4[	3	20	0.2	30	0.3	0.6	1.8	
[4; 6[	5	40	0.4	70	0.7	2	10	
[6 ; 8 [	7	20	0.2	90	0,9	1,4	9.8	
[8; 10[	9	10	0,1	100	1	0.9	8.1	
Total		100	...			5	29,8	

4pts

2) Répondre aux questions suivantes

2pts

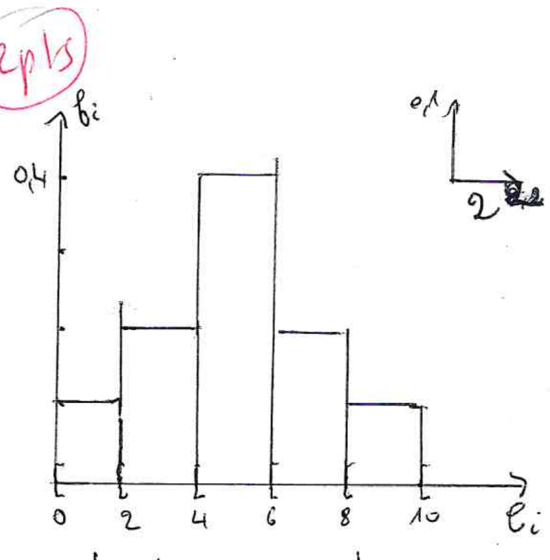
a)La classe modale=[4 ; 6[0,25 0,5
Le mode $M_0 =$ 5

b) la moyenne $\bar{X} =$ 5 0,5

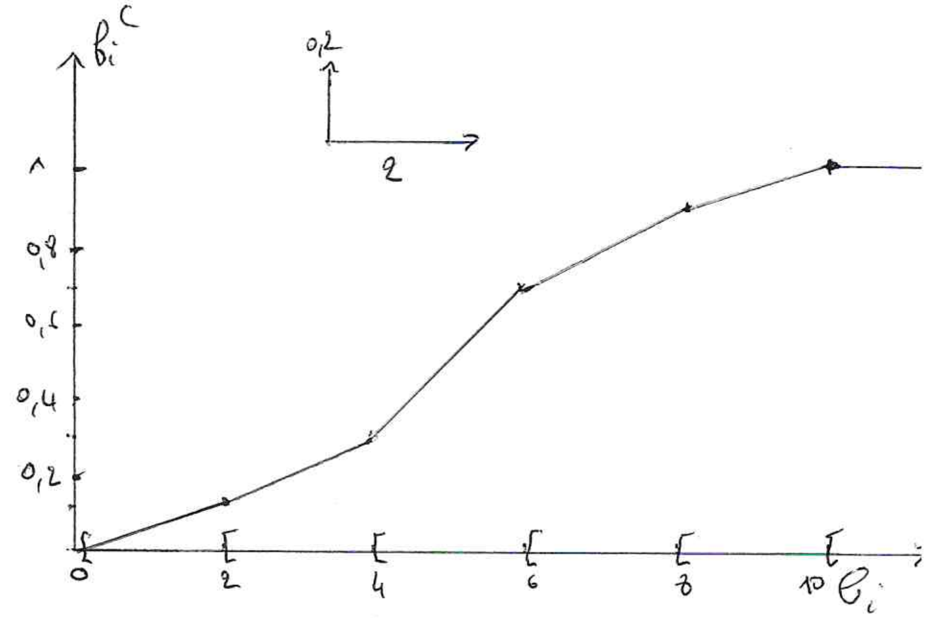
c) La médiane $M_e =$ 0,5 $a_i + e\,\dfrac{(0{,}5 - f_{i-1}^c)}{f_i^c - f_{i-1}^c} = 4 + 2\left(\dfrac{0{,}5 - 0{,}3}{0{,}7 - 0{,}3}\right) = 5$ 0,25

3) Tracer l'histogramme des fréquences ainsi que la courbe cumulative et confirmer le calcul de la médiane par le graphe. 1 pt + 1pt

2pts



histogramme des frequences



Courbe cumulative

4) Calculer la variance de X ainsi que l'écart type.

1pts

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum f_i c_i^2 - (\bar{X})^2 = 29{,}8 - 25$$
$$= 4{,}8 \quad 0{,}5$$

$$\sigma_X = \sqrt{4{,}8} \quad 0{,}5$$

5) On introduit une nouvelle série statistique Y=X+1

a) calculer la moyenne $\bar{Y} = \bar{X} + 1 = 5 + 1 = 6$ 0,5

3,1pts

b) calculer la variance de Y : Nous avons $Y = ax + 1 \Rightarrow Var(y) = a^2 Var(X)$

donc $Var(Y) = Var(X) \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y$ 0,1

c) calculer la covariance de Y, en expliquant la méthode de calcul : La droite de regression

0,5

$$y = ax + b = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \cdot X + [\bar{Y} - a\bar{X}] \Rightarrow Cov(X,Y) = a \cdot Var(X) = 1 \times 4{,}8 = 4{,}8 \quad 0{,}5$$

$a = 1 \quad b = 1$

d) calculer le degré de corrélation r= $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{4{,}8}{(\sigma_x)^2} = \frac{4{,}8}{4{,}8} = 1$ 0,5

Conclusion

Une serie parfaitement symétrique et La corrélation est parfaite 0,5

Exercice 2 07pts

Soit trois ensembles A, B, C. de Ω tel que

$P(A) = 0.4 \quad P(B) = 0.6 \quad P(c) = 0.5 \quad P(A \cup B) = 1 \quad et\ P(A \cup C) = 0.7$

1) Montrer que A et B sont (ME) et (CE) :

1,5pts

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= 0{,}4 + 0{,}6 - 1$$
$$= 0$$

0,5

dc A et B sont (ME) 0,5

et A et B sont CE Car $A \cup B = \Omega$ 0,5

2) Montrer que A et C sont indépendants

1pt

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \Rightarrow P(A \cap C) = -P(A \cup C) + P(A) + P(C)$$
$$= -0{,}7 + 0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}2 \quad 0{,}5$$

et $P(A) \cdot P(C) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$ 0,5

3) Montrer que

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

2,5pts

0,5

$$C = (C \cap \Omega) = C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad 0{,}5$$

A et B sont (ME) $\Rightarrow$ $(C \cap A)$ et $(C \cap B)$ sont (ME) 0,5

$$\Rightarrow P(C) = P(C \cap \Omega) = P[(C \cap A) \cup (C \cap B)] =$$
$$P(C \cap A) + P(C \cap B) \quad 0{,}5$$

4) Calculer $P(C/A)$; $P(C/B)$; $P(A/C)$ $P(B/C)$

$$P(C/A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

$$P(C/B) = \frac{P(B\cap C)}{P(B)} = \frac{1-P(C\cap A)}{P(B)} = \frac{0,5-0,2}{0,6} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$P(A/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{0,2}{0,5} \quad \text{et } P(B/C) = \frac{0,3}{0,5} \Rightarrow P(A/C)+P(B/C) = 1$$

2pts

5) Vérifier que $P(A/C) + P(B/C) = 1$

$$P(A/C) + P(B/C) = \frac{0,2}{0,5} + \frac{0,3}{0,5} = 1$$

Exercice3 4 pts

Soit la fonction suivant :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x \in [0;4] \\ 0 & x \in]-\infty,0[\ \cup \ ]4,+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que *la fonction* f_X est une fonction de densité (FDP).

a) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ par definition 0,5

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_0^4 f_X(x)\,dx + \int_4^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^4 \frac{1}{4}\,dx + \int_4^{+\infty} 0\,dx$

$= 0 + \left.\frac{x}{4}\right]_0^4 + 0 = \left.\frac{x}{4}\right]_0^4 = \frac{4}{4} - 0 = 1$ 0,5

2) Calculer *l'éspérance mathématique* $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^4 \frac{x}{4}\,dx = \left.\frac{1}{8}x^2\right]_0^4 = \frac{16}{8} - 0 = 2$$ 1

3) Calculer $P_X(x \leq -1)$; $P_X(x \leq 3)$ $P_X(x \geq 3)$ $P_X(x \geq 2021)$

2 pts
0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5

$P_X(X \leq -1) = 0$; $P(X\leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{4}\,dx = \left.\frac{x}{4}\right]_0^3 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$

$P(X\geq 3) = 1 - P(X\leq 3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X\geq 2021) = 1 - P(X\leq 2021) = 1 - 1 = 0$