Université de Tlemcen **Faculté de Technologie** **2020 - 2021**

Tronc Commun ST **Épreuve Finale Math 1** **1 Heure**

L'usage de tout **appareil électronique** est strictement **interdit**

Exercice 1(8 pts):

1. Soit $A = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

a. Calculer A^2.

b. En déduire la valeur exacte de A.

2. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad 2^n \geq n+1$.

Exercice 2 (12 pts):

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-2)^{\frac{3}{2}} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

1. Montrer que f *est continue et dérivable en* $x_0 = 2$.

2. On pose $g(x) = f(x) - \cos(\pi x)$.

a. Calculer $g(-1)$, $g(2)$ *et* $g(3)$.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $]0,\ 2[$.

3. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+4}{x} \qquad \lim_{x\to 4} \frac{f(x)+4}{x-4}.$$

Bon Courage

Corrigé

Exercice 1(8 pts):

1. Soit $A = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

a. On a

$$A^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5} - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5}$$

$$A^2 = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 2. \qquad \textbf{(2 pts)}$$

b. Valeur exacte de A.

$$A^2 = 2 \Longrightarrow \left(A = \sqrt{2} \text{ ou } A = -\sqrt{2}\right) \quad \textbf{(1 pt)}$$

Le réel A étant positif donc $A = \sqrt{2}$. **(1 pt)**

2. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad 2^n \geq n+1$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ *, car* $2^0 = 1 = 0 + 1$. **(1 pt)**

- Supposons que pour l'entier naturel n fixé on a $2^n \geq n+1$

et montrons que $2^{n+1} \geq n+2$.

Nous avons d'après l'hypothèse de récurrence, $2^n \geq n+1$.

En multipliant par 2 les deux membres de cette inégalité, nous obtenons :

$$2^{n+1} \geq 2n+2$$

Comme $2n+2 \geq n+2$, *car* $n \in \mathbb{N}$, *nous déduisons que*

$$2^{n+1} \geq n+2. \textbf{(2 pts)}$$

- Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad 2^n \geq n+1$. **(1 pt)**

Exercice 2 (12 pts):

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-2)^{\frac{3}{2}} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

1. Montrons que f est continue en $x_0 = 2$.

Nous avons $f(2) = 4 \times 2 - 2^2 - 4 = 0$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (4x - x^2 - 4) = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2), \qquad \textbf{(2 pts)}$$

f est donc continue en $x_0 = 2$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 2$. $\quad (4x - x^2 - 4 = -(x-2)^2)$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = -\lim_{x \to 2^-} (x-2) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} (x-2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$$

Et par suite f est dérivable en $x_0 = 2$ et $f'(2) = 0$. **(2 pts)**

2. On pose $g(x) = f(x) - \cos(\pi x)$.

a. Calculons $g(-1)$, $g(2)$ *et* $g(3)$.

$g(-1) = f(-1) - \cos(-\pi) = -(-1-2)^2 - (-1) = -9 + 1 = -8.$ **(0,5 pt)**

$$g(2) = f(2) - \cos(2\pi) = 0 - 1 = -1 \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

$$g(3) = f(3) - \cos(3\pi) = (3-2)^{\frac{3}{2}} - (-1) = 1 + 1 = 2. \quad \textbf{(1 pt)}$$

b. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $]0,\ 2[$.

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires:

La fonction g est continue sur $[0,2]$. **(0,5 pt)**

$$g(0) = -4 - \cos 0 = -5 \quad \textbf{(1 pt)} \quad , \quad g(2) = -1$$

Remarquons que $g(0)$ *et* $g(2)$ *sont de même signe, nous ne pouvons donc rien conclure.* **(0,5 pt)**

Essayons d'appliquer le T. V. A dans l'intervalle $[0,1] \subset [0,2]$:

On a **(1 pt)** $g(1) = -(1-2)^2 - \cos\pi = -1 - (-1) = 0,$ *C'est fini !*

L'équation $g(x) = 0$ *admet dans l'intervalle* $]0,\ 2[$ *la solution* $x_0 = 1$. **(1 pt)**

3. Calculons les limites suivantes:

a.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+4}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x - x^2 - 4 + 4}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x - x^2}{x} = \lim_{x\to 0}(4 - x) = 4. \quad \textbf{(1 pt)}$$

b.

$$\lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{f(x)+4}{x-4} = \lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}} + 4}{x-4} = \pm\infty \quad \textbf{(1 pt)}$$

car $(x-2)^{\frac{3}{2}} + 4 \longrightarrow 2\sqrt{2} + 4$ *et* $x - 4 \longrightarrow 0$.