Université Abou Bakr Belkaid – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Mardi 29 Septembre 2020.
Durée : 1h00 min.
Aucun document n'est autorisé.

2ème année Licence (L2) en Génie Civil (S6)

Examen final de méthodes numériques (GS422)

Exercice 1 (9 Pts) (Résolution des systèmes linéaires)

(6 pts) **1/** Réaliser la décomposition **LU** de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3 pts) **2/** En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \end{Bmatrix}$

Exercice 2 (6 Pts) (Résolution des équations non-linéaires)

Soit $f(x) = e^x - x - 2$ avec I = [1,2]

Nous proposons d'appliquer 2 méthodes de point fixe basées sur les fonctions g(x) suivantes :

$$\begin{cases} g_1(x) = e^x - 2 \\ et \\ g_2(x) = ln(2 + x) \end{cases}$$

(1 pt) **1/** Comment ces fonctions ($g_1(x)$ *et* $g_2(x)$) ont été obtenues ?

(3 pts) **2/** Faire 3 itérations à partir de $x_0 = 1$ pour chacune des 2 méthodes de point fixe (considérer 3 chiffres après la virgule).

(2 pts) **3/** En déduire si les méthodes de points fixes utilisant $g_1(x)$ *et* $g_2(x)$ sont convergentes. Justifier votre réponse.

Exercice 3 (5 Pts) (Interpolation polynômiale)

Soient les points représentés dans le tableau suivant :

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-1	1	0	0

(1 pt) **1/** Quel est le degré du polynôme représenté par ces points ?

(4 pts) **2/** Trouver ce polynôme par la méthode de Lagrange.

Bon courage

Université Abou Bakr Belkaid – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Mardi 29 Septembre 2020.
Durée : 1h00 min.
Aucun document n'est autorisé.

2ème année Licence (L2) en Génie Civil (S6)

Corrigé de l'Examen final : Méthodes Numériques (GS422)

Exercice 1 (9 pts)

1/ La matrice A peut-être décomposée en LU selon l'algorithme ci-dessous :

$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right)$ $\quad pour\ j \geq i$

$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right)/u_{jj}$ $\quad pour\ j < i$ **(1 pt)**

$l_{ij} = 1$ $\quad pour\ j = i$

Les termes de la diagonale de L : $l_{11} = l_{22} = l_{33} = l_{44} = 1$ **(4 x 0.25 pt)**

On calculera alternativement les lignes de U et les colonnes de L.

- La première ligne de U n'est autre que la première ligne de [A] : $u_{11} = 2;\ \ u_{12} = 4;\ \ u_{13} = 4;\ u_{14} = 1$ **(4 x 0.25 pt)**

- La première colonne de L : $L_{21} = \frac{a_{21}}{U_{11}} = \frac{1}{2}$; $L_{31} = \frac{a_{31}}{U_{11}} = \frac{1}{2}$; $L_{41} = \frac{a_{41}}{U_{11}} = 0$ **(3 x 0.25 pt)**
- La seconde ligne de U : $U_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12} = 1,\ U_{23} = a_{23} - L_{21}U_{13} = -1,\ U_{24} = a_{24} - L_{21}U_{14} = -\frac{3}{2}$ **(3 x 0.25 pt)**

- La seconde colonne de L : $L_{32} = \frac{a_{32}-L_{31}U_{12}}{U_{22}} = 3,$: $L_{42} = \frac{a_{42}-L_{41}U_{12}}{U_{22}} = -1$ **(2 x 0.25 pt)**
- La 3ème ligne de U : $U_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23} = 7$; $U_{34} = a_{34} - L_{31}U_{14} - L_{32}U_{24} = 6$ **(2 x 0.25 pt)**

- La 3ème colonne de L : $L_{43} = \frac{a_{43}-L_{41}U_{13}-L_{42}U_{23}}{U_{33}} = 0$ **(0.25 pt)**
- La 4ème ligne de U : $U_{44} = a_{44} - L_{41}U_{14} - L_{42}U_{24} - L_{43}U_{34} = \frac{3}{2}$ **(0.25 pt)**

$[U] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$	$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2/ Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, avec $b = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \end{Bmatrix}$, on utilise la décomposition LU et on résout successivement les systèmes $LZ = b$ et $Ux = Z$

a. Système $LZ = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = 4 \\ Z_2 = -3 \\ Z_3 = 5 \\ Z_4 = 3 \end{cases}$ **(4 x 0.25 pt)**

b. Système $Ux = Z \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_4 = 2} \\ \boldsymbol{x_3 = -1} \\ \boldsymbol{x_2 = -1} \\ \boldsymbol{x_1 = 5} \end{cases}$ **(4 x 0.5 pt)**

La solution finale est donc : $\boxed{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{Bmatrix}}$

Exercice 2 (6 pts)

Soit $f(x) = e^x - x - 2$ avec I = [1,2]

Nous proposons d'appliquer 2 méthodes de point fixe basées sur les fonctions g(x) suivantes :

$$\begin{cases} g_1(x) = e^x - 2 \\ et \\ g_2(x) = ln(2 + x) \end{cases}$$

1/ Comment ces fonctions (*$g_1(x)$ et $g_2(x)$*) ont été obtenues :

f(x)=0 $\Rightarrow e^x - x - 2 = 0$ on isolant x de cette équation afin de l'écrire sous la forme x=g(x), on obtient : $\boxed{x = e^x - 2 = g_1(x)}$ **(0.5 pt)**

Aussi, on peut isoler le x de e^x, on aura alors $e^x = x + 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln(x + 2) = g_2(x)}$ **(0.5 pt)**

2/ Faire 3 itérations à partir de x_0=1 pour chacune des 2 méthodes de point fixe :
L'algorithme du point fixe s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \ donné \\ x_{n+1} = g(x_n) \\ critère\ d'arrêt(10^{-3}) \end{cases}$$

		Itération N° 1 x_1	Itération N° 2 x_2	Itération N° 3 x_3	
x_0=1	$g_1(x_n) = e^{x_n} - 2$	0,718	0,050	-0.948	**(3 x 0.5 pt)**
	$g_2(x_n) = \ln(x_n + 2)$	1,098	1,131	1.141	**(3 x 0.5 pt)**

3/ La convergence de *$g_1(x)$ et $g_2(x)$* ?

D'après les calculs $g_1(x)$ **diverge** alors que $g_2(x)$ **converge**. **(0.5 pt)**

Démonstration : Pour que ces deux fonctions convergent, il faut appliquer le théorème d'OSTROWDKI :

Max $|g'(x)|_{x\in I} < 1$ **(0.5 pt)**

a) $g_1(x) = e^x - 2 \Rightarrow g'_1(x) = e^x \Rightarrow \begin{cases} si\ 1 \le x \le 2\ (dans\ l'intervalle\ I) \\ e^1 \le e^x \le e^2 \iff 2.718 \le e^x \le 7.389 \end{cases}$ **(0.25 pt)**

$\Rightarrow$ max $|g'(x)|_{x\in I} = 7.389 > 1 \Rightarrow$ **$g_1(x)$ diverge** **(0.25 pt)**

b) $g_2(x) = \ln(x + 2) \Rightarrow g'_1(x) = \frac{1}{x+2}$ **(0.25 pt)**

$$\Rightarrow \begin{cases} si\ 1 \le x \le 2\ \left(dans\ l'intervalle\ I\right) \\ 1 + 2 \le x + 2 \le 2 + 2 \iff 3 \le x + 2 \le 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x+2} \le \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ max $|g'(x)|_{x\in I} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ **$g_2(x)$ converge** **(0.25 pt)**

Exercice 3 (5 pts)

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-1	1	0	0

1/ Quel est le degré du polynôme représenté par ces points ?

Le polynôme trouvé à partir de ces points est de degré (n-1). Etant donné le nombre de points (n=4) alors le polynôme sera de degré 3. **(1 pt)**

2/ Trouver ce polynôme par la méthode de Lagrange :

Le polynôme de Lagrange : $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i(x)$; **(0,5 pt)**

$L_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ et $a_i = f_i$ **(0,5 pt)**

$$P(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + a_3L_3(x)$$

Avec $a_0 = f(-1) = -1$; $a_1 = f(0) = 1$; $a_2 = f(1) = 0$; $a_3 = f(2) = 0$ **(4 x 0.25pt)**

$\Rightarrow P(x) = -L_0(x) + L_1(x) + 0.L_2(x) + 0.L_3(x) = \boldsymbol{-L_0(x) + L_1(x)}$

$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{6} = \boldsymbol{-\frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)}$ **(0,5 pt)**

$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - x + 2)}$ **(0,5 pt)**

$$\boxed{P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x + 1}$$ **(1 pt)**