Corrigé de l'examen final - Math4 -

Exercice 1 / **(4 pts)** / Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x+iy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy.$$

La fonction g est-elle holomorphe ?

• **Solution :** Posons $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ et $v(x,y) = -2xy + 2y$. Les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2x + 2, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y. \end{cases}$$

(0.5+0.5+0.5+0.5 pts)

Nous remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire,

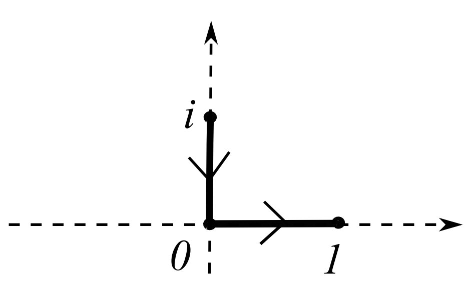
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

(0.5+0.5 pts)

sont satisfaites pour $(x,y) = (0,0)$ **(1 pts)**. Ce qui implique que la fonction f est holomorphe au point 0.

Exercice 2 / **(8 pts)** / Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz, \qquad \text{avec } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \text{ est le chemin suivant}$$



• **Solution :** La paramétrisation des chemins est donnée par :

$\gamma_1(t) = i - it, 0 \leq t \leq 1, \gamma_1'(t) = -i$**(1+0.5+0.5 pts)** $\quad \gamma_2(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \gamma_2'(t) = 1$**(1+0.5+0. 5 pts)**.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z} dz &= \int_{\gamma_1} \overline{z} dz + \int_{\gamma_2} \overline{z} dz, && \textbf{(1 (somme)+1 (définition) pts)} \\
&= \int_0^1 [-i + it](-i) dt + \int_0^1 [t](1) dt && \textbf{(0.5+0.5 pts)}, \\
&= -0.5 + 0.5 = 0 && \textbf{(0.5+0.5 pts)}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 /**(8 pts)** / En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_{|z-i|=\frac{1}{5}} \frac{2}{(z-i-3)} \, dz,$$

$$2) \int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{(z-i-2)^2} \, dz.$$

• **Solution :** 1/ La singularité de f est

$$z_0 = i + 3.$$

Nous remarquons que $i+3$ est à l'extérieur du domaine inclus dans $|z-i| = \frac{1}{5}$. Autrement dit, la fonction f est holomorphe sur ce domaine. Le chemin en considération est fermé et le domaine pris est simplement connexe **(1.5 pts)**.

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy **(1 pts)**. Ainsi,

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{5}} \frac{2}{(z-i-3)} = 0 \qquad \textbf{(1 pts)}.$$

2/ La singularité de f est

$$z_0 = i + 2.$$

Cette singularité est à l'intérieur de notre domaine. Les conditions de la formule intégrale de Cauchy sont satisfaites (chemin fermé, domaine S.C, e^z est holomorphe) **(3 pts)**. Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{(z-i-2)^2} \, dz, \\
&= 2\pi i g'(i+2) = 2\pi i e^{i+2}, && \textbf{(1.5 pts)}
\end{aligned}$$

avec

$$g(z) = e^z.$$