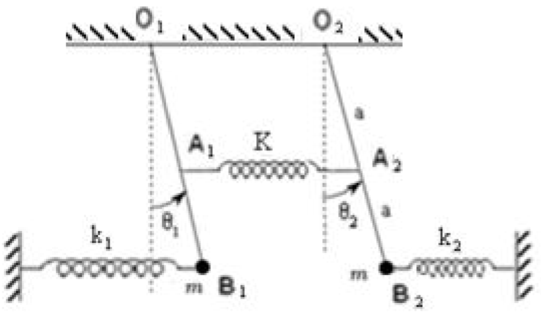
Sujet examen TS312 janv. 2020

Exercice 1 ***(12 points)***

On considère le système oscillatoire mécanique suivant :



$O_1B_1 = O_2B_2 = \ell = 2a$

$O_1A_1 = A_1B_1 = a$

$O_2A_2 = A_2B_2 = a$

Les deux pendules identiques constituées de tiges (O_1B_1 et O_2B_2) sans masse de longueur $\ell = 2a$ portent à leurs extrémités deux masses m identiques ponctuelles.

Le ressort de constante K du milieu assure le couplage.

En mouvement les deux pendules sont repérés à chaque instant par leurs élongations angulaires θ_1 et θ_2.

(Au repos $\theta_1 = \theta_2 = 0$, les pendules sont verticaux et les 3 ressorts sont non déformés).

Prendre dans la suite : $\ell = 2a$, $k_1 = k_2 = k$ et $K = 2k$

1) Déterminer l´énergie cinétique et potentielle du système en fonction de θ_1 et θ_2 .

2) Etablir le système d'équations différentielles qui décrit mouvement.

En déduire ce système dans le cas des petites oscillations.

3) Trouver les pulsations propres correspondantes aux modes de vibrations possibles.

4) En déduire la matrice de passage et écrire les solutions générales.

Exercice 2 ***(8 points)***

Soit dans le vide 2 champs électriques :

$$\vec{E1}\begin{cases}10.\sin(10^8t - k.z)\\ 10.\cos(10^8t - k.z)\\ 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{E2}\begin{cases}10.\sin(10^8t - k.z)\\ -10.\cos(10^8t - k.z)\\ 0\end{cases}$$

1) Quelle sont la direction de propagation, la période T, la longueur d'onde λ et le nombre d'onde k des 2 champs.

2) Quelles sont la nature et le sens de leurs polarisations.

3) Déterminer le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ résultant.

Quelle est sa nature, et le sens de sa polarisations.

4) Déterminer le champ magnétique $\vec{H}$ correspondant à $\vec{E}$. On rappel que : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\delta \vec{B}}{\delta t}$; $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$

Quelle est sa nature, et le sens de sa polarisation.

Réponses Examen TS312 janv. 2020

Réponse 1

1) $T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta_2^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) \qquad \ell = 2a \longrightarrow \quad T = 2\,ma^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2)$ ***(1 pt)***

$$V = -mg\ell\cos\theta_1 - mg\ell\cos\theta_2 + \frac{1}{2} k_1 X_1^2 + \frac{1}{2} k_2 X_2^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2$$

avec $X_1 = \ell\sin\theta_1 = 2a\sin\theta_1 \qquad X_2 = \ell\sin\theta_2 = 2a\sin\theta_2 \qquad x_1 = a\sin\theta_1 \qquad x_2 = a\sin\theta_2$

$$V = -2mga(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + 2ka^2(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2) + ka^2(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2$$

$$V = -2mga(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + ka^2(3\sin^2\theta_1 + 3\sin^2\theta_2 - 2\sin\theta_2\sin\theta_1)$$ ***(2 pts)***

2) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot\theta_{\substack{1\\2}}}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta_{\substack{1\\2}}} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 4ma^2\ddot\theta_1 + 2mga\sin\theta_1 + ka^2(6\sin\theta_1\cos\theta_1 - 2\sin\theta_2\cos\theta_1) = 0 \\ 4ma^2\ddot\theta_2 + 2mga\sin\theta_2 + ka^2(6\sin\theta_2\cos\theta_2 - 2\sin\theta_1\cos\theta_2) = 0 \end{cases}$ ***(2 pts)***

Dans le cas des petites oscillations, θ_1 et θ_2 petits, on peut faire les approximations : $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$

$$\begin{cases} \ddot\theta_1 + \dfrac{2mga + 6ka^2}{4ma^2}\theta_1 - \dfrac{2ka^2}{4ma^2}\theta_2 = 0 \\ \ddot\theta_2 + \dfrac{2mga + 6ka^2}{4ma^2}\theta_2 - \dfrac{2ka^2}{4ma^2}\theta_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \ddot\theta_1 + \left(\dfrac{g}{2a} + \dfrac{3k}{2m}\right)\theta_1 - \dfrac{k}{2m}\theta_2 = 0 \\ \ddot\theta_2 + \left(\dfrac{g}{2a} + \dfrac{3k}{2m}\right)\theta_2 - \dfrac{k}{2m}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

système de 2 équations différentielles du 2ème ordre sans 2ème membres linéaires couplées ***(1 pt)***

3) $\longrightarrow$ les solutions sont sinusoïdales : $\theta_{\substack{1\\2}}(t) = A_{\substack{1\\2}}\cos(\omega t + \varphi_{\substack{1\\2}})$

écriture complexe $\bar\theta_{\substack{1\\2}}(t) = \bar A_{\substack{1\\2}} e^{i\omega t}$ avec $\bar A_{\substack{1\\2}} = A_{\substack{1\\2}} e^{i\varphi_{\substack{1\\2}}} \longrightarrow \ddot{\bar\theta}_{\substack{1\\2}} = -\omega^2 \bar A_{\substack{1\\2}} e^{i\omega t}$

$\longrightarrow$ écriture matritielle $\begin{pmatrix} -\omega^2 + \left(\dfrac{g}{2a} + \dfrac{3k}{2m}\right) & -\dfrac{k}{2m} \\ -\dfrac{k}{2m} & -\omega^2 + \left(\dfrac{g}{2a} + \dfrac{3k}{2m}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar A_1 \\ \bar A_2 \end{pmatrix} = 0$: système de 2 équations à 2 inconus sans second membre ***(2 pts)***

Il existe d'autres solutions que la solution évidente $\bar A_{\substack{1\\2}} = 0$ si le déterminant $= \left[-\omega^2 + \left(\frac{g}{2a} + \frac{3k}{2m}\right)\right]^2 - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 = 0$

$\left(-\omega^2 + \frac{g}{2a} + \frac{2k}{m}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{2a} + \frac{k}{m}\right) = 0 \longrightarrow$ 2 pulsations propres $\quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2a} + \frac{2k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2a} + \frac{k}{m}}$ ***(2 pts)***

4) mode 1 $\omega_1^2 = \frac{g}{2a} + \frac{2k}{m} \longrightarrow -\frac{k}{2m}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar A_1 \\ \bar A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ vecteur propre $\vec V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ***(1 pt)***

mode 2 $\omega_2^2 = \frac{g}{2a} + \frac{k}{m} \longrightarrow \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar A_1 \\ \bar A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ vecteur propre $\vec V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ matrice de pasage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ sultions générales $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}$ ***(1 pt)***

$\theta_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$
$\theta_2(t) = -A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

on trouve les 4 constantes $A_{\substack{1\\2}}$ et $\varphi_{\substack{1\\2}}$ grâce aux Conditions Initiale

Réponses Examen TS312 janv. 2020

Réponse 2

1) $\vec{k}\,\vec{r} = k\,\vec{u}\,\vec{r} = k.z \rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{k}}{k} = \vec{k} \rightarrow \vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ champs électriques d'ondes sinusoïdales planes se propageant suivant l'axe des z *(1 pt)*

$\omega = 10^8 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi\,10^{-8}$ s *(1/2 pt)* $\quad \lambda = T\,c = 2\pi\,10^{-8}\;3\;10^8 = 6\pi$ m *(1/2 pt)* $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{3}\,\text{m}^{-1}$ *(1/2 pt)*

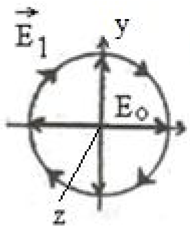
$$\left|\vec{E}_1\right| = \sqrt{E_{1x}^2 + E_{1y}^2} = 10 = \sqrt{E_{2x}^2 + E_{2y}^2} = \left|\vec{E}_2\right| = \text{constant}$$

2) on fixe le plan d'onde à z = 0 $\rightarrow$ polarisation

	ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
	t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$3\frac{T}{4}$	T
$\vec{E}_1$	E_{1x}	0	10	0	-10	0
	E_{1y}	10	0	-10	0	10
$\vec{E}_2$	E_{2x}	0	10	0	-10	0
	E_{2y}	-10	0	10	0	-10

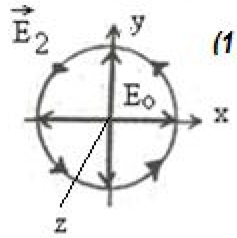
sens de polarisation

circulaire droite



(1 pt)

circulaire gauche



(1 pt)

$\rightarrow \vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ ont une polarisation circulaire

3) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \begin{cases} 20\sin(10^8 t - \frac{z}{3}) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ *(1/2 pt)*

champ électrique sinusoïdal d'une onde plane se propage dans la direction des z et polarisation rectiligne suivant l'axe des x *(1 pt)*

4) $$\vec{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\delta}{\delta z}E_x\,\vec{j} = -\frac{20}{3}\cos(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$$ *(1 pt)*

$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = 4\pi\,10^{-7}\,\vec{H} = \frac{20}{3\,10^8}\sin(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{1}{6\pi}\sin(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j}$$ *(1/2 pt)*

champ magnétique sinusoïdal d'une onde plane se propage dans la direction des z

et polarisation rectiligne suivant l'axe des y *(1/2 pt)*