L2 TTL 2019 / 2020

Proba / Stat

Solution Proposée

examen TS341

Questions de cours

I) hyp : A et B indep $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ 0,5

Pt : $\bar{A}$ et $\bar{B}$ indep $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) \overset{??}{=} P(\bar{A}) . P(\bar{B})$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$ 1
$$= \underbrace{1 - P(A)}_{} - P(B) + P(A) \times P(B)$$
$$= P(\bar{A}) - P(B)\,[1 - P(A)] = P(\bar{A}) - P(B) . P(\bar{A})$$
$$= P(\bar{A})\,[1 - P(B)] = P(\bar{A}) . P(\bar{B}) \quad \text{CQFD}$$

II] 1) Si $Y = -2X + 2$ et $E(X) = 1$ alors $E(Y) = 2$ Faux 0,25

car : $E(Y) = E(-2X+2) = -2E(X) + 2 = -2 + 2 = 0$ 0,25

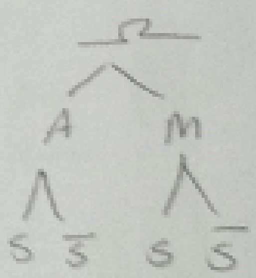
2) Si $Y = -2X + 2$ et $V(X) = 1$ alors $V(Y) = 0$ Faux 0,25

car : $V(Y) = V(-2X+2) = (-2)^2 V(X) = 4V(X) = 4$ 0,25

3) On ne peut pas approximer X par une loi de Poisson 0,5

car Il faut $\begin{cases} n \geq 30 \\ \text{et } p < 0,1 \end{cases}$ or On a : $\begin{cases} n = 100 \geq 30 \\ \text{mais } p = 1/2 > 0,1 \end{cases}$ 0,5

Exercice N° 1



Soient les evenements :

S « le patient est soulagé »

A « " " a pris l'asperine »

M « " " " " le medicament M »

On a : $P(A) = \frac{3}{5}$ $P(M) = \frac{2}{5}$ 1

$P(S/A) = 0,75 \Rightarrow P(\bar{S}/A) = 1 - P(S/A) = 0,25$ 1

$P(S/M) = 0.9 \Rightarrow P(\bar{S}/M) = 1 - P(S/M) = 0,10$

1) Pt $P(S)$

$$P(S) = P(S/A) . P(A) + P(S/M) . P(M)$$
$$= 0,75 \times \frac{3}{5} + 0,9 \times \frac{2}{5} = 0,81$$

1

2) Pt $P(A/S)$ $\quad P(A/S) = \frac{P(S/A) . P(A)}{P(S)}$

$$P(A/S) = \frac{0,75 \times 3/5}{0,81} = 0,555$$

1

Exercice N°2 :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+\theta} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien une densité

$$f \text{ densité} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

0,5

* $f(x) \geq 0$ évident car $e^{z} \geq 0 \quad \forall z$

1,5

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{\theta} f(x)\,dx} + \int_{\theta}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\theta}^{+\infty} e^{-x+\theta}\,dx$

$$= \left[-e^{-x+\theta}\right]_{\theta}^{+\infty} = \left[0 + e^{-\theta+\theta}\right] = 1 \quad \text{CQFD}$$

2) Fonction de répartition

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

0,25

Si $x < \theta$. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\theta} f(t)\,dt = 0$

0,5

Si $x \geq \theta$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \cancel{\int_{-\infty}^{\theta} f(t)dt} + \int_{\theta}^{x} f(t)dt$

$$= \int_{\theta}^{x} e^{-t+\theta}\,dt = \left[-e^{-t+\theta}\right]_{\theta}^{x}$$

0,75

$$= -e^{-x+\theta} + e^{-\theta+\theta} = 1 - e^{-x+\theta}$$

<u>Conclusion</u>

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x+\theta} & \text{Si } x \geq \theta \\ 0 & \text{Si } x < \theta \end{cases}$$

<u>En déduire</u> $P(X < 5\theta) = ??$

$P(X < 5\theta) = P(X \in]-\infty, 5\theta[)$

$= F_X(5\theta) - F(-\infty) = F_X(5\theta) - \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ (0,5)

$= 1 - e^{-5\theta+\theta} - 0 = 1 - e^{-4\theta}$ (0,5)

(0,5)

3) <u>l'espérance</u> $\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\theta} \cancel{x \underbrace{f(x)}_{0}}\, dx + \int_{\theta}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-x+\theta} dx$

(0,5)

<u>Intégration par partie</u>

$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x+\theta} \longrightarrow v(x) = -e^{-x+\theta}$ (0,5)

donc $E(X) = \left[-x\, e^{-x+\theta}\right]_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} e^{-x+\theta} dx$

$= \left[0 + \theta e^{0}\right] + \left[-e^{-x+\theta}\right]_{\theta}^{+\infty}$ (0,5)

$= \theta + \left[-0 + e^{0}\right] = \theta + 1$

<u>Exercice N°3</u> : $X \longleftrightarrow N(167, 5)$

On Pose $Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-167}{5} \longleftrightarrow N(0,1)$

On note F_λ : f° de répartition de la loi centrée - réduite (la Normale)

1) $P(X > 170) = P\left(\frac{X-167}{5} > \frac{170-167}{5}\right)$

$= P(Z > 0,6) = 1 - P(Z \leq 0,6)$

$= 1 - F_\lambda(0,6)$ (1)

$= 1 - 0,725$

$= 0,275$

2) $P(X < 160) = P\left(\frac{X-167}{5} < \frac{160-167}{5} \right) = P(Z < -1{,}4)$ 1

$= F(-1{,}4) = 1 - F(1{,}4) = 1 - 0{,}919 = 0{,}081$

3) $P(163 < X < 169) = P\left(\frac{163-167}{5} < \frac{X-167}{5} < \frac{169-167}{5} \right)$

$= P\left(\frac{-4}{5} < Z < 2/5 \right) = F_X(2/5) - F_X(-4/5)$

$= F(0{,}4) - [1 - F(0{,}8)]$

$= F(0{,}4) + F(0{,}8) - 1$ 1

$= 0{,}655 + 0{,}788 - 1 = 0{,}443$

4) Proba de celle accepter, est :

$P(167-\alpha < X < 167+\alpha) = 0{,}46$ $(1-0{,}54)$

or

$P(167-\alpha < X < 167+\alpha) = P\left(\frac{167-\alpha-167}{5} < \frac{X-167}{5} < \frac{167+\alpha-167}{5} \right)$

$= P\left(-\frac{\alpha}{5} < Z < \frac{\alpha}{5} \right) = 2F\left(\frac{\alpha}{5}\right) - 1$

donc $2F\left(\frac{\alpha}{5}\right) - 1 = 0{,}46$

$\Rightarrow F\left(\frac{\alpha}{5}\right) = \frac{1{,}46}{2} = 0{,}73$ 1

$\Rightarrow \frac{\alpha}{5} \simeq 0{,}615$

$\Rightarrow \alpha \simeq 3{,}075$ cm $\simeq 3{,}1$ cm 1

donc $X_{max} = 167+\alpha \simeq 167 + 3{,}1 = 170{,}1$ cm.

$X_{min} = 167 - \alpha = 167 - 3{,}1 = 163{,}9$ cm.

Rmq Dans cet exercice, on est obligé de mettre tout à la même unité (cm).