

Master 1 : Structures

Correction de l'EXAMEN FINAL DE MECANIQUE DES STRUCTURES (GS711)

Exercice 1 (6 pts)

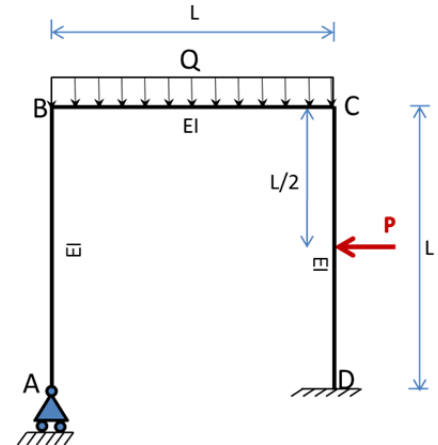
Soit le portique ABCD, montré en figure ci-contre, constitué de poutre et de deux poteaux de rigidités égales, de longueurs $L=4$ m. Le poteau CD est soumis à une force à mi-travée d'intensité $P=4$ kN. La poutre est soumise à une charge uniformément répartie d'intensité $Q=3$ kN/m.

On donne : $E=30\,000$ MPa, $A=(30 \times 30)$ cm²

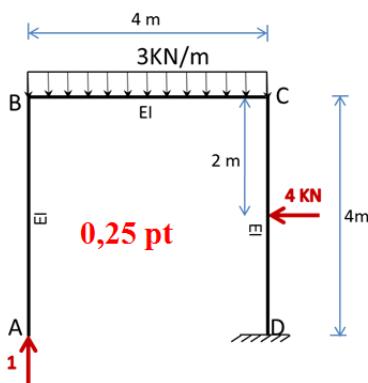
En utilisant la méthode des forces, déterminer :

1/ Les réactions d'appuis. (4 pts)

2/ Tracer les diagrammes des efforts internes (T et M). (2 pts)



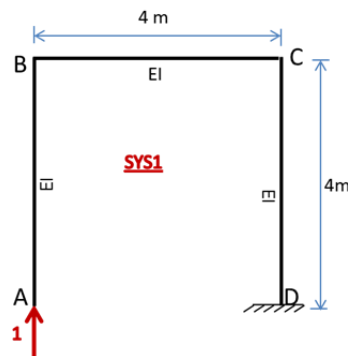
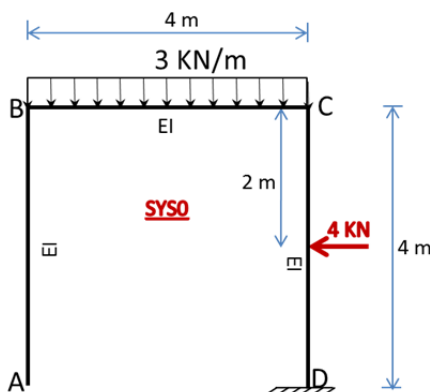
1/ Les réactions d'appuis



Le système est une fois hyperstatique ; on doit éliminer une réaction et la remplacer par une inconnue $X_1=1$.

On choisit le système de base ci-contre. On remplace l'appui A par une réaction verticale $R_A=1$.

On calcule les moments fléchissant du système « SYS0 » correspondant à l'effet du chargement extérieur. Et ceux du système « SYS1 » correspondant à l'inconnue hyperstatique $X_1=1$.



Poteau A-B :

$$0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad M_1(x) = 0 \text{ kN.m}$$

0,25 pt

Poutre B-C :

$$0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad M_1(x) = -Q \frac{x^2}{2} = -1,5x^2 \text{ kN.m}$$

$$\left| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow M_1(0) = 0 \\ x=4 \text{ m} \rightarrow M_1(4) = -24 \text{ kN.m} \end{array} \right.$$

0,25 pt

Poteau C-D :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \text{ m} \quad M_1(x) = -Q \frac{L^2}{2} = -24 \text{ kN.m} \\ 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \quad M_2(x) = -Q \frac{L^2}{2} - 4(x-2) = -16 - 4x \end{array} \right.$$

0,25 pt

Poteau A-B :

$$0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad M_1(x) = 0 \text{ kN.m}$$

0,25 pt

Poutre B-C :

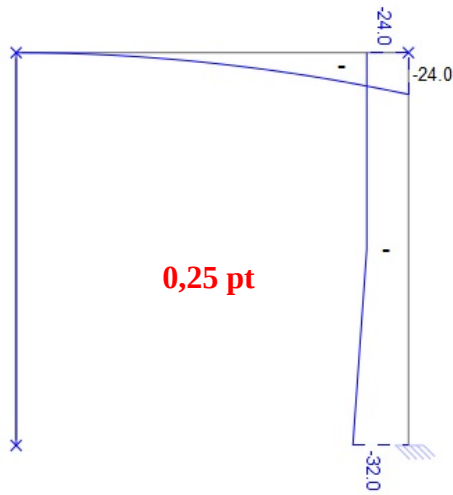
$$0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad M_1(x) = x$$

$$\left| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow M_1(0) = 0 \\ x=4 \text{ m} \rightarrow M_1(4) = 4 \text{ kN.m} \end{array} \right.$$

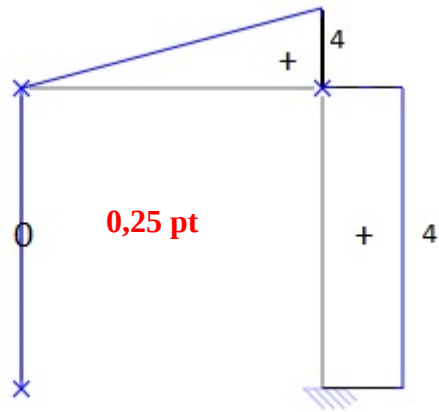
0,25 pt

Poteau C-D : $0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad M_1(x) = 4 \text{ kN.m}$

0,25 pt



0,25 pt



0,25 pt

$$\sum_{j=1}^1 \delta_{ij} X_j = -\delta_{i0} \leftrightarrow \delta_{11} X_1 = -\delta_{10}$$

Les coefficients de flexibilité sont déterminés à partir de la multiplication des diagrammes :

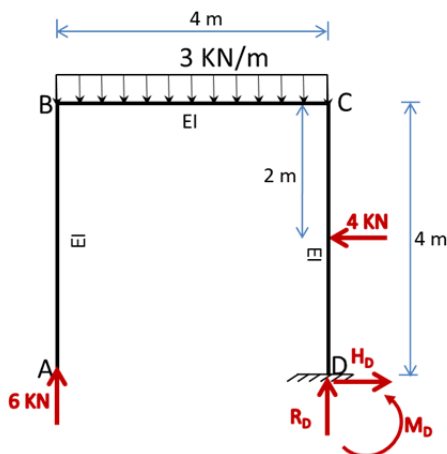
$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_i m_j dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (4)(4) \frac{2}{3} (4) + (4)(4)(4) \right] = \frac{256}{3EI} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} [-96 + (4)(2)(-24) - 224] = -\frac{512}{EI} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$\delta_{11} X_1 = -\delta_{10} \leftrightarrow \frac{256}{3EI} X_1 = \frac{512}{EI} \Rightarrow X_1 = 6 \text{ KN} \quad 0,25 \text{ pt}$$

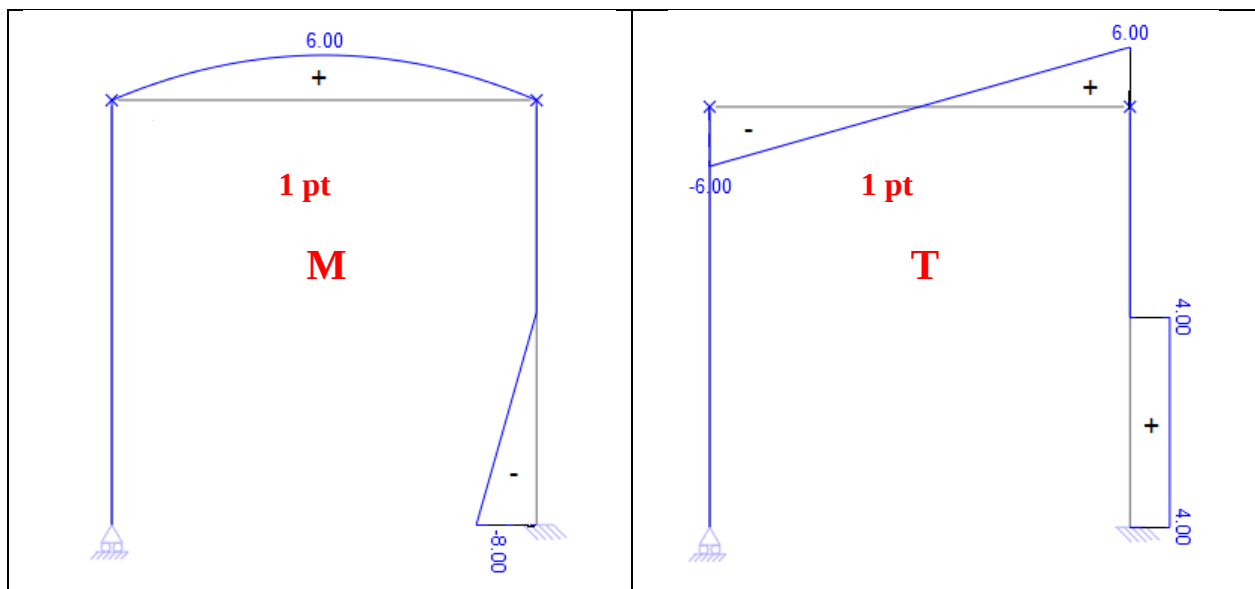
Par équilibre global, on obtient les réactions de l'encastrement D :



$$\begin{aligned} \Sigma F_H = 0 &\Leftrightarrow H_D = 4 \text{ KN} \\ \Sigma F_V = 0 &\Leftrightarrow R_D = 6 = 3 \text{ kN} \\ \Sigma M_D = 0 &\Leftrightarrow M_D = -8 \text{ kN m} \end{aligned}$$

0,25 pt x 3

2/ Les diagrammes des efforts internes (T et M)



1 pt

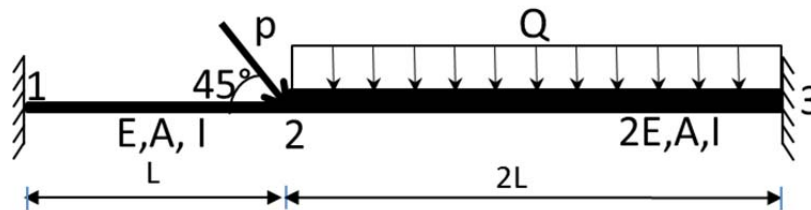
M

1 pt

T

Exercice 2 (8 pts)

Soit la poutre bi-encastée de longueur $3L$ montrée en figure. Celle-ci est sollicitée par une charge uniformément répartie entre les nœuds : 2 et 3. Au nœud 2, une charge concentrée inclinée de 45° avec l'horizontal est appliquée. La rigidité de la partie 2-3 est égale à 2 fois la rigidité de la partie 1-2.



En utilisant la méthode des déplacements :

- (1 pt) 1/ préciser le nombre de degrés de liberté (ddl) par nœud et de la poutre (total) ?
- (2 pts) 2/ Ecrire les matrices de rigidité de chaque élément.
- (2 pts) 3/ Faire l'assemblage matriciel pour le calcul des ddl.
- (1 pt) 4/ Spécifier les conditions aux limites.
- (2 pts) 5/ Déterminer les composantes du vecteur force appliqué à cette structure.

1/ Nombre de ddl :

Par nœud : 3ddl 0,5 pt	Pour la structure : nddl par noeud x nombre de noeud = $3 \times 3 = 9$ ddl 0,5 pt
----------------------------------	--

2/ Matrices de rigidité locales :

Element 1-2 : E, I, A, L **1 pt**

$$[k]_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \leftrightarrow [k]_{1-2} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix}$$

Element 2-3 : 2E, A, I, 2L **1 pt**

$$[k]_{2-3} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \leftrightarrow [k]_{2-3} = \begin{bmatrix} [S_{22}] & [S_{23}] \\ [S_{32}] & [S_{33}] \end{bmatrix}$$

3/ Assemblage matriciel pour le calcul des ddl:

$$[K] = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & 0 \\ [S_{21}] & [S_{22}]_{1-2} + [S_{22}]_{2-3} & [S_{23}] \\ 0 & [S_{32}] & [S_{33}] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 2\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{15EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad 2 \text{ pts}$$

4/ Spécification des conditions aux limites :

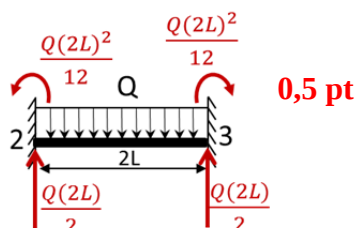
Nous avons des encastres aux nœuds 1 et 3 ce qui donne : $U_1=U_3=V_1=V_3=\theta_1=\theta_3=0$.
Nous devons éliminer les 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème}, 7^{ème}, 8^{ème} et 9^{ème} Lignes ainsi que les 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème}, 7^{ème}, 8^{ème} et 9^{ème} colonnes.

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 2\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{15EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad 1 \text{ pt}$$

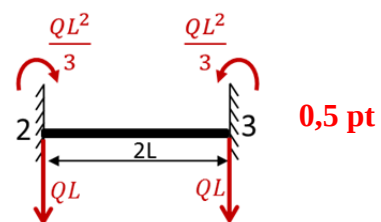
5/ Composantes du vecteur Forces :

Elément 2-3 :

Il est soumis à une charge uniformément répartie. Les réactions dans ce cas-là seront :



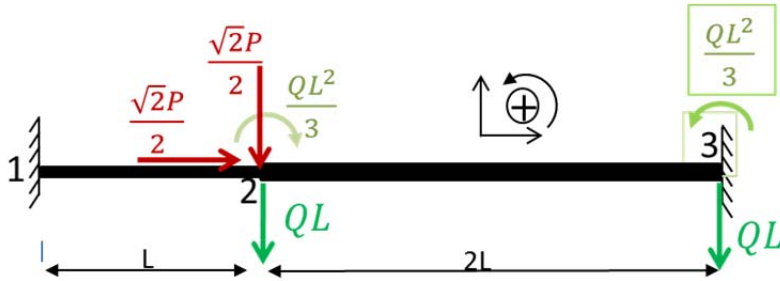
Le chargement équivalent aux nœuds sera :



Aussi au nœud 2, une charge inclinée est appliquée qui peut être décomposée en P_x et P_y

avec $\begin{cases} P_x = \frac{\sqrt{2}}{2}P \\ P_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \end{cases}$ **0,5 pt**

Le vecteur chargement sera :



0,5 pt

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ M_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}P \\ -QL - \frac{\sqrt{2}}{2}P \\ -QL^2/3 \\ R_{3x} \\ -QL \\ QL^2/3 \end{Bmatrix}$$

Calcul des ddl aux nœuds :

Le système à résoudre est : $[K] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}P \\ -\left(QL + \frac{\sqrt{2}}{2}P\right) \\ -QL^2/3 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2} PL}{4 EA} \\ -\frac{L^3}{111 EI} (9QL + 4\sqrt{2}P) \\ -\frac{L^2}{37 EI} \left(\frac{8}{3}QL + \frac{\sqrt{2}}{2}P\right) \end{Bmatrix}$$