

Examen en traitement du signal (BM 813 : Semestre 8)
M1 Imagerie médicale
Corrigé

QCM : (04 points)

- 1) On cherche à échantillonner le signal $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ où $f_0 = 1\text{kHz}$. Le critère de Shannon est vérifié lorsque par exemple :
 - a) la période d'échantillonnage est égale à 0.1 ms **Juste**
 - ~~b) la période d'échantillonnage est égale à 0.1 s **Faux**~~
 - ~~c) la fréquence d'échantillonnage est égale à 1kHz **Faux**~~
 - d) la fréquence d'échantillonnage est égale à 100kHz **Juste**
- 2) On considère $s(t) = \cos(2\pi t)$
 - a) L'échantillonnage réalisé en commençant à $t = 0$ et avec une fréquence d'échantillonnage de 1Hz de $s(t)$ est un signal constant **Juste**
 - b) L'échantillonnage réalisé en commençant à $t = 0$ et avec une fréquence d'échantillonnage de 2Hz de $s(t)$ est la suite $(-1)^n$ **Juste**
 - ~~c) Quelle que soit la fréquence d'échantillonnage, l'échantillonnage de $s(t)$ est toujours un signal périodique **Faux**~~
 - d) L'échantillonnage de $s(t)$ est toujours un signal à valeurs discrètes **Faux**

Exercice n°1 : (05 points)

Soit un signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = 2\sin(2\pi \cdot 200 \cdot t) - \cos(2\pi \cdot 300 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 400 \cdot t)$$

- 1) Déterminez la fréquence d'échantillonnage minimale (01 point).
- 2) Déterminez les 4 premiers échantillons de $x(t)$ (fréquence d'échantillonnage minimale) et faite une conversion analogique-numérique sur 6 bits, sachant que $x(t)$ varie sur $[-4, +4]$ (03 points).

Solution

- 1) On a $f_1 = 200\text{ Hz}$, $f_2 = 300\text{ Hz}$, $f_3 = 400\text{ Hz}$ donc $f_{\max} = 400\text{ Hz}$

$$F_e \geq 2f_{\max} \text{ (Théorème de Shannon)}$$

La fréquence d'échantillonnage minimale est $F_e = 800\text{ Hz}$

$$2) \quad x(0) = -1 + 1 = 0 \quad 0,5 \text{ point}$$

$$x(1) = x(T_e) = x\left(\frac{1}{800}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi) = 2 + 0,707 - 1 = 1,707 \quad 0,5 \text{ point}$$

$$x(2) = x(2T_e) = x\left(\frac{2}{800}\right) = 2\sin(\pi) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\pi) = 0 - 0 + 1 = 1 \quad 0,5 \text{ point}$$

$$x(3) = x(3T_e) = x\left(\frac{3}{800}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + \cos(3\pi) = -2 - 0,707 - 1 = -3,707 \quad 0,5 \text{ point}$$

Conversion analogique numérique sur 6 bits

$$\text{Pas de quantification : } q = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2^n - 1} = \frac{8}{2^6 - 1} = \frac{8}{63} = 0,127$$

$$N_0 = \frac{x(0) - V_{\min}}{q} = \frac{4}{0,127} = 31,49 \cong 31 = 011111 \quad 0,5 \text{ point}$$

$$N_1 = \frac{x(1) - V_{\min}}{q} = \frac{5,707}{0,127} = 44,93 \cong 45 = 101101 \quad 0,5 \text{ point}$$

$$N_2 = \frac{x(2) - V_{min}}{q} = \frac{5}{0,127} = 39,37 \cong 39 = 100111 \quad 0,5 \text{ point}$$

$$N_3 = \frac{x(3) - V_{min}}{q} = \frac{0,293}{0,127} = 2,3 \cong 2 = 000010 \quad 0,5 \text{ point}$$

Exercice n°2: (07 points)

- 1) Déterminer la TFD du signal composé de 4 échantillons suivant :

$$x = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+j \\ 0 \\ 1-j \end{bmatrix} \quad (02 \text{ points})$$

- 2) Considérer maintenant le système discret décrit par l'équation de récurrence :

$$y(n) - 0.6y(n-1) + 0.05 y(n-2) = 2x(n-1) + x(n-2)$$

Déterminer la fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

Le filtre trouvé est de quel type ? AR , MA ou ARMA

$$H(Z) = \frac{2Z^{-1} + Z^{-2}}{1 - 0,6Z^{-1} + 0,05Z^{-2}}$$

Le filtre est de type ARMA

- 3) Calculer la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de :

$$x(n) = \delta(n - n_0)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi n f}$$

$$X(f) = e^{-j2\pi n_0 f}$$

Exercice n°3: (04 points)

Soit le processus aléatoire $x(t) = r \cos(\omega t + \varphi)$ où r est une variable aléatoire avec $E[r] = 0$, φ et ω sont des variables réelles. $x(t)$ est-il stationnaire au sens large ?

Solution :

$$E[x(t)] = \cos(\omega t + \varphi) E[r] = 0$$

$$K_x(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega(t-\tau) + \varphi) E[r^2]$$

$$= \frac{E[r^2]}{2} [\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t + 2\varphi + \omega\tau)]$$

Le processus n'est donc pas stationnaire au sens large.