Sujet de l'examen final du module TS 341 avec corrigé proposé

2018 – 2019

W. Benyelles, H.W. HAFFAF

Université Abou Bekr Belkaïd – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Télécommunication
Licence 2

Année universitaire 2018/2019
Mercredi 16 janvier 2019
Durée 1h30

Examen Final – Probabilités et Statistiques (TS341)

* L'utilisation de la calculatrice est autorisée. L'utilisation du téléphone portable est strictement interdite.

* L'empreint de la calculatrice et/ou de tout autre objet est strictement interdit pendant l'examen.

Bon courage !
Mme Benyelles & Mme Haffaf

Questions de cours (5 points)

1) Soit X une variable statistique qui représente le nombre d'enfants par famille. On a le sondage suivant pour 15 familles :

0, 0, 1, 1, 4, 0, 3, 2, 0, 2, 5, 2, 1, 4, 2.

Déterminer la population et le type de la variable statistique. Remplir le tableau suivant :

x_i	n_i	f_i =	n_{ci} =

2) Soient A, B et C trois événements. Donner, en démontrant, la formule de $P(A \cup B \cup C) = ?$

3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ : $X \rightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Démontrer que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Exercice 1 (3 points)

Dans une population de jeunes, 30% sont atteints par une maladie respiratoire. En particulier, 60% sont atteints par cette maladie sachant qu'ils sont fumeurs.

On compte environ 40% de fumeurs parmi ces jeunes.

1) Quelle est la probabilité pour qu' un jeune soit fumeur sachant qu'il est atteint par la maladie?

2) Quelle est la probabilité pour qu'un jeune soit atteint par la maladie, sachant qu'il est non fumeur ?

On considérera les événements suivants :

A : « l'individu est un fumeur »

B : « l'individu est atteint par la maladie respiratoire ».

Exercice 2 (5 points)

On se donne la fonction suivante :

$$f(x)=\begin{cases} ax+a\,;\, si\, x\in[0,1] \\ 0\,;\, sinon \end{cases} \quad \text{où} \quad a\in\mathbb{R}$$

1) Trouver la valeur du réel a pour que f soit une fonction de densité.

2) Soit X une variable aléatoire qui a pour densité la fonction f trouvée dans la question 1.

i) Déterminer la fonction de répartition de X, F .

ii) Calculer $P(X\geqslant\frac{1}{2})$.

Exercice3 (7 points)

On tire 400 fois à pile ou face avec une pièce de monnaie non truquée. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de « pile ».

1) Donner la loi de X en justifiant.

2) Donner E(X) et V(X).

3) On souhaite approximer X par une loi normale. Est-ce justifié ? Si oui, quels paramètres doit-on prendre pour cette nouvelle loi ?

4) Calculer, en utilisant cette loi normale, les probabilités suivantes : $P(X\geqslant 220)$, $P(180\leqslant X<220)$.

5) Trouver le nombre a tel que $P(X\leqslant a)=0{,}9898$.

Corrigé proposé

Corrigé type (proposé) de l'EF (Proba/Stat)

I/ Questions de cours

1) Population : familles du sondage (0,5)

type de la variable X : quantitatif discret (0,5)

Tableau statistique : (0,25x4)

x_i	n_i	$f_i = \frac{n_i}{N}$	$n_{ic} = \sum_{j=1}^{i} n_j$
0	4	4/15	4
1	3	3/15	7
2	4	4/15	11
3	1	1/15	12
4	2	2/15	14
5	1	1/15	15
Σ	$N=15$	1	

2) $P(A \cup B \cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C)$

(0,5) $= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - P((A\cap C)\cup(B\cap C))$

(0,5) $= P(A)+P(B)+P(C) - P(A\cap B) - [P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)]$

(0,5) $= P(A)+P(B)+P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$ C.Q.F.D

3) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (0,25)

Par définition, X a pour densité : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Et donc $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$

(0,25) (0,25)

Par intégration par partie : $u = x \longrightarrow u' = 1dx$

0,25

$v' = \lambda e^{-\lambda x}dx \longrightarrow v = -e^{-\lambda x}$

$$E(x) = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{CQFD}$$

0,25

Exo 1

Selon les evenements considérés, les données se traduisent par :

0,25 $\begin{cases} P(A) = 0,4 \\ P(B) = 0,3 \end{cases}$ et $P(B/A) = 0,6$ 0,25

1) On cherche $P(A/B)$?

En appliquant la definition des Probabilités conditionnelle ou la formule de Bayes, on a :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)\ P(A)}{P(B)}$$ 0,25

0,25

$$= \frac{0,4 \times 0,6}{0,3} = 0,8$$ 0,25

2/ On cherche $P(B/\bar{A})$?

En appliquant la definition des Probabilités conditionnelle ou la formule de Bayes, on a :

0,25

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}/B)\ P(B)}{P(\bar{A})}$$ 0,25

Or $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - 0,8 = 0,2$ 0,25

cl : $P(B/\bar{A}) = \dfrac{0,3 \times 0,2}{0,6} = 0,1$ 0,25

donc si un jeune ne fume pas, il n'a que 10% de chance d'être atteint par une maladie respiratoire

2/

Exo2

1/ f une densité, il faut $\begin{cases} * \ f(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ * \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$ (0,5)

$f(x) \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$ (0,25) $\Big($ car $x \in [0,1]$ donc $x \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq 1 > 0$; $x \notin [0,1]$ $f(x) = 0 \geq 0$ (0,25)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\cancel{f(x)}}_{0} dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} \underbrace{\cancel{f(x)}}_{0} dx$$

$$= \int_0^1 a(1+x)\,dx = a\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = a\,\frac{3}{2}$$ (0,5)

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2/3}$ (0,5)

cl : $f(x) = \begin{cases} 2/3\,(x+1) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de Proba

2/ $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ (0,25)

Si $x < 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \boxed{0}$$ (0,5)

Si $0 \leq x \leq 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\cancel{f(t)}}_{0} dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$ (0,5)

$$= \int_0^x \frac{2}{3}(t+1)\,dt = \frac{2}{3}\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^x = \boxed{\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)}$$

Si $x > 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\cancel{f(t)}}_{0} dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} \underbrace{\cancel{f(t)}}_{0} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}(t+1)\,dt = \frac{2}{3}\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1 = [1]$$ (0,5)

Conclusion

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}}$$ (0,5)

2/ $P(X \geq 2) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right)$ (0,5) $\left[\text{ou } \int_{1/2}^{+\infty} f(x)\,dx\right]$

$= 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{(1/2)^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$ (0,5) (remplacement ou calcul)

$= 0,583$ (0,5)

Ex03

1) . X représente une experience à 2 issues (2 résultats possible) : succès (tirer pile) et échec (tirer face)

. Experience independante, repetée 400 fois (0,5)

Par conséquent, X suit une binomiale de parametre $n = 400$ et $p =$ "Proba d'avoir pile" $= 1/2$ (0,5)

$X \hookrightarrow B(400, 1/2)$

et donc $P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$

$= C_{400}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \quad k \in \{0..400\}$

2) $E(X) = np = 400 \times \frac{1}{2} = 200$ (0,5)

$V(X) = npq = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$ (0,5) $(q = 1-p)$

3/ oui, on peut approcher X par une loi Normale

les critères $\begin{cases} n = 400 > 30 \\ p = \frac{1}{2} \text{ loin de 0 et de 1} \end{cases}$ ou $\begin{cases} np \geq 5 \\ \text{et} \\ nq \geq 5 \end{cases}$ → 01

Dans ce cas on aura

$X \hookrightarrow N(np, \sqrt{npq})$ c'est à dire $X \hookrightarrow N(200, 10)$ 01

4/ Calcul des probabilités :

$$P(X \geq 220) = 1 - P(X < 220)$$

lecture loi 01

centrer 01

Resultat 01

$$= 1 - P\left(\frac{X-200}{10} \leq \frac{220-200}{10}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2)$$

$Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-200}{10}$

$$= 1 - F_Z(2)$$

donc $Z \hookrightarrow N(0,1)$

$$= 1 - 0{,}9772 \quad \text{(après lecture de la Table)}$$

$$= 0{,}0228$$

$$P(180 \leq X \leq 220) = P\left(\frac{180-200}{10} \leq \frac{X-200}{10} \leq \frac{220-200}{10}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2)$$

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$

$$= F_Z(2) - F_Z(-2)$$

01 $= \frac{X-200}{10}$

centrer

$$= F_Z(2) - [1 - F_Z(2)]$$

$Z \hookrightarrow N(0,1)$

$$= 2F_Z(2) - 1$$

01 loi - lecture

$$= 2(0{,}9772) - 1 = 0{,}9544$$

01 Resultat

5/ $a = ?$ $P(X \leq a) = 0{,}9898$

$P(X \leq a) = P\left(\frac{X-200}{10} \leq \frac{a-200}{10}\right) = P(Z \leq a') = F_Z(a')$ $Z \hookrightarrow N(0,1)$

d'où $F_Z(a') = 0{,}9898 \Rightarrow a' = 2{,}32 \Rightarrow \frac{a-200}{10} = 2{,}32$ 01

01

$\Rightarrow \boxed{a = 223{,}2}$

5/