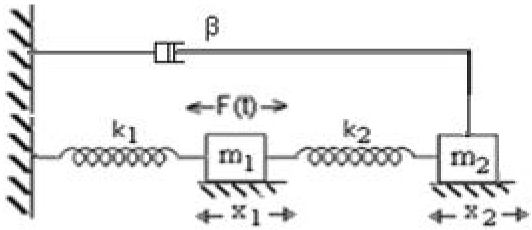
Dépt. TTL L2 S3 **Sujet** Examen TS312 (**ondes et vibrations**) janv. 2019

Exercice 1 ***(10 points)***

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure :



1) F(t) est une force d'excitation. x_1 et x_2 sont les déplacements dynamiques consécutifs de m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibres, (au repos les ressorts ne sont pas déformés). Déterminer les équations du mouvement des masses m_1 et m_2. En déduire le système d'équations différentielles correspondant.

2) Etablir les équations différentielles électriques analogues en charges q_1 et q_2 puis en courant i_1 et i_2 .

En déduire le schéma du circuit électrique équivalent à ce système.

Remarque la question 2 est indépendante des questions 3 et 4.

3) On donne $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$ et $F(t) = a \exp(i\,\Omega\, t)$.

Les solutions x_1 (t) et x_2 (t) du régime permanant étant du même type que l'excitation F(t), donner l'écriture matricielle du système d'équations différentielles en amplitudes complexes $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ des solutions x_1 et x_2 du régime permanant.

4) En déduire dans le cas β = 0 (pas d'amortissement) les pulsations de résonances.

Exercice 2 ***(10 points)***

Soit une onde électromagnétique, dans le vide, dont l'induction magnétique **B** est donnée par :

$$\vec{B} = B_0\,\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})\cos[\pi 10^8 t - k\frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y)]$$

1) Déterminer la pulsation ω, la période T, la longueur d'onde λ et le nombre d'onde k.

2) Déterminer le vecteur unitaire **u** de la direction de propagation de **B**.

3) Donner le vecteur unitaire **v** polarisation de **B**. Préciser la nature de sa polarisation.

En déduire l'expression du champ magnétique **H**.

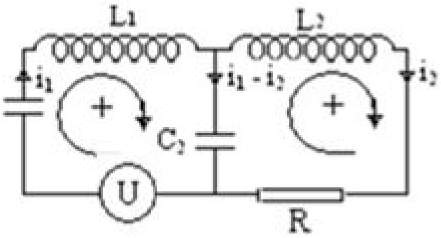
4) Trouver le champ électrique **E** correspondant. En déduire la nature et le sens de la polarisation de **E**. (On rappel que : $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$).

5) Faire une représentation dans un repère orthonormé (Oxyz) des vecteurs **E**, **H** et **k.**

Réponse 1

1)
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - \beta\dot{x}_2 \end{cases} \quad \textbf{1,5 pt} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + \beta\dot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{½ pt}$$

2)
$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)q_1 - \frac{1}{C_2}q_2 = U(t) \\ L_2\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 - \frac{1}{C_2}q_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{1 pt} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2}\int(i_1 - i_2)dt + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt = U(t) \\ L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2 - \frac{1}{C_2}\int(i_1 - i_2)dt = 0 \end{cases} \quad \textbf{1 pt}$$



1 pt

3)
$$\begin{matrix} m_1 = m_2 = m \\ k_2 = k_1 = k \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = \frac{F(t)}{m} \\ \ddot{x}_2 + \frac{\beta}{m}\dot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{½ pt}$$

$$F(t) = a\,e^{i\Omega t} \longrightarrow \bar{x}_{\substack{1\\2}}(t) = X_{\substack{1\\2}}\,e^{i(\Omega t + \varphi_{\substack{1\\2}})} = \bar{X}_{\substack{1\\2}}\,e^{i\Omega t} \quad \text{avec} \quad \bar{X}_{\substack{1\\2}} = X_{\substack{1\\2}}\,e^{i\varphi_{\substack{1\\2}}} \quad \textbf{1,5 pt}$$

$\longrightarrow$ écriture matritielle des équations différentielle :
$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\Omega^2 + i\Omega\frac{\beta}{m} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$
système de 2 équations à 2 inconus

4) $\beta = 0$ résonance $\leftrightarrow$ amplitudes $X_{\substack{1\\2}}$ infinies **½ pt**

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} \frac{a}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\Omega^2 + \frac{k}{m} \end{vmatrix} = \frac{\frac{a}{m}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right)}{\det} \qquad \bar{X}_2 = \frac{1}{\det}\begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2\frac{k}{m} & \frac{a}{m} \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\frac{k\,a}{m^2}}{\det}$$

avec $\det = \left(-\Omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2}$ **1 pt**

$X_{\substack{1\\2}}$ infinies $\rightarrow$ $\det = 0 = \Omega^4 - 3\frac{k}{m}\Omega^2 + \frac{k^2}{m^2}$ **½ pt**

$\Delta = 5\frac{k^2}{m^2}$ 2 résonnances: $\Omega^2_{\substack{1\\2}} = \frac{k}{2m}(3 \pm \sqrt{5})$ **1 pt**

Réponse 2

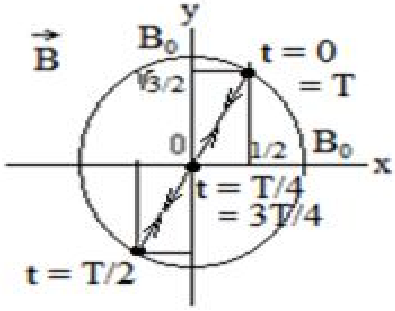
1) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi\,10^{8}\ \text{rd/s}$ $\quad T = 2\ 10^{-8}\ \text{s}$ $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{cT} = \dfrac{2\pi}{3\ 10^{8}\ 2\ 10^{-8}} = \dfrac{\pi}{3}\ \text{m}^{-1}$ $\quad \lambda = 6\ \text{m}$ **2 pts**

2) $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \dfrac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)$ $\quad \vec{k} = k\vec{u}$ $\quad \vec{r}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$ $\rightarrow \vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{k} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$ **1 pt**

3) vecteur polarisation $\vec{v} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ **½ pt**

on fixe le plan d'onde à $\vec{k}\vec{r} = 0 \rightarrow$ polarisation

	ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
	t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$3\frac{T}{4}$	T
$\vec{B}$	B_x	$\frac{B_0}{2}$	0	$-\frac{B_0}{2}$	0	$\frac{B_0}{2}$
	B_y	$\frac{\sqrt{3}}{2}B_0$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}B_0$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}B_0$



polarisation rectiligne suivant la direction du vecteur $\vec{v} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ **1 pt**

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{B_0}{\mu_0}\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})\cos\left[\pi 10^{8} t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)\right]$$ **½ pt**

4) $\vec{rot}\,\vec{H} = \dfrac{\delta\vec{D}}{\delta t}$ $\quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \rightarrow \vec{rot}\,\vec{H} = \varepsilon_0\dfrac{\delta\vec{E}}{\delta t}$ **½ pt** $\quad c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = 9\ 10^{16}$

$$\vec{rot}\,\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\delta}{\delta x}H_y - \frac{\delta}{\delta y}H_x\right)\vec{k} = \varepsilon_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$$

$$= \left(\frac{3}{4}k\frac{B_0}{\mu_0}\sin\left[\pi 10^{8}t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)\right] + \frac{1}{4}k\frac{B_0}{\mu_0}\sin\left[\pi 10^{8}t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)\right]\right)\vec{k} = k\frac{B_0}{\mu_0}\sin\left[\pi 10^{8}t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)\right]\vec{k}$$

1,5 pt

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int k\frac{B_0}{\mu_0}\sin\left[\pi 10^{8}t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)\right]\delta t\,\vec{k} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{k}{\omega}B_0\cos\left[\pi 10^{8}t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)\right]\vec{k}$$

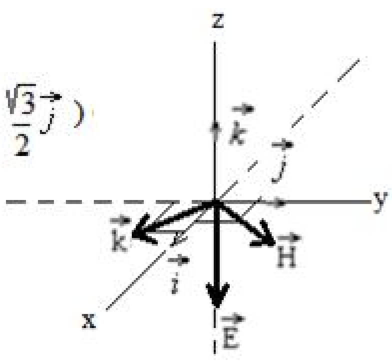
$\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\dfrac{k}{\omega} = c^2\dfrac{k}{\omega} = c = 3\,10^{8}$ $\quad \vec{E} = -3\,10^{8}\,B_0\cos\left[\pi 10^{8}t - \dfrac{\pi}{6}(\sqrt{3}x - y)\right]\vec{k}$ **1,5 pt**

$\vec{E}$ a une polarisation rectiligne suivant $-\vec{k}$ (direction de l'axe -0z) **½ pt**

5) $\vec{E} = -3\,10^{8}\,B_0\cos\left[\pi 10^{8}t - \dfrac{\pi}{6}(\sqrt{3}x - y)\right]\vec{k}$

$\vec{H} = \dfrac{B_0}{\mu_0}\cos\left[\pi 10^{8}t - \dfrac{k}{2}(\sqrt{3}x - y)\right]\left(\dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$

$\vec{k} = k\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}\right)$



1 pt