Univesrité Aboubekr Belkaid de Tlemcen
Département de Télécom.
Année universitaire 2018-2019.
Module MATH3.

Corrigé type de l'examen final.

Exercice 1 (6 points)**.** Etude de la nature des séries numérique

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n^4+\cos n}$. On na
$$\frac{n^2}{n^4+\cos n} \sim \frac{1}{n^2}\textbf{(1 point)}$$
Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge , par la règle d'équivalence la série converge. **(1point)**

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n n!}{(2n)!}$. On applique la règle de D'Alembert. On a
$$\lim \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}.\frac{(2n)!}{3^n n!} = \lim \frac{3}{2(2n+1)} = 0 < 1.\textbf{(1point)}$$
Donc, la série converge. **(1point)**

Exercice 2 (5 points)**.** Soit l'intégrale impropre
$$I = \int_0^\infty \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$$

1. la convergence de l'intégrale impropre. **(3 points)**
La fonction $t \to \ln(1+\frac{1}{t^2})$ etant continue sur $]0,\infty[$, donc elle est localement intègrable sur $]0,\infty[$. **(0.5 point)**
En outre, on a
$$\ln(1+\frac{1}{t^2}) \sim_\infty \frac{1}{t^2}.\textbf{(1 point)}$$
Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ converge, alors $\int_1^\infty \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ converge par equivalence. **(1 point)**
D'autre part, comme pour $t>0$, on a $\ln(1+\frac{1}{t^2}) = \ln(1+t^2) - 2\ln t$ et les intégrales $\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$, $\int_0^1 \ln(t)dt$ convergent, alors l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ converge aussi. **(1 point)**

2. Calcul de l'intégrale impropre.**(2 points)**

Soit $a \in]0,\infty[$. Par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}\int_0^a \ln(1+\frac{1}{t^2})dt &= \left[t\ln(1+\frac{1}{t^2})\right]_0^a + 2\int_0^a \frac{1}{1+t^2}dt\\ &= a\ln(1+\frac{1}{a^2}) + [2\arctan t]_0^a\\ &= a\ln(1+\frac{1}{a^2}) + 2\arctan a. \textbf{ (1 point)}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \ln(1+\frac{1}{t^2})dt &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a \ln(1+\frac{1}{t^2})dt\\ &= \lim_{a\to\infty}\left(a\ln(1+\frac{1}{a^2}) + 2\arctan a\right)\\ &= \pi. \textbf{ (1 point)}\end{aligned}$$

Exercice 3 (5 points)**.** Soit $\mathcal{D}$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}.$$

1. Représentation graphiquement du domaine $\mathcal{D}$. **(1 point)**
2. Calcule de l'intégrale $\int_0^1 \left[x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}^3\right] dx$. **(3 points)**
   On effectue le changement $x = 2\sin\theta$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left[x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}^3\right] dx\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[8\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} + \frac{8}{3}\sqrt{1-\sin^2\theta}^3\right]\cos\theta d\theta \textbf{(1 points)}\\ &= 16\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin\theta\cos\theta)^2 d\theta + \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4\theta d\theta\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin(2\theta))^2 d\theta + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3+4\cos(2\theta)+\cos(4\theta))d\theta \textbf{(1 points)}\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos(4\theta))d\theta + \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}[\sin(2\theta)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{6}[\sin(4\theta)]_0^{\frac{\pi}{6}}\\ &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \textbf{(1 points)}\end{aligned}$$

3. Calcule de l'intégrale double **(2 points)**

Comme indiqué dans la figure, on peut écrire

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_{\mathcal{D}_1}(x^2+y^2)dxdy + \int\int_{\mathcal{D}_2}(x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{3}}(x^2+y^2)dy)dx + \int_0^1 \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dy)dx\textbf{(1 points)} \\
&= \int_0^1 (\sqrt{3}x^2+\sqrt{3})dx + \int_0^1 x^2\left[\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}) + \frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2}^3 - \sqrt{3}^3)\right]dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3\right]dx \\
&= \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\textbf{(1 points)}
\end{aligned}$$

4. En déduire le volume du domaine V, **(1 point)**
   le volume est donné par

$$\begin{aligned}
Vol(V) &= \int\int\int_V dxdydz \\
&= \int_0^1 (\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} (\int_0^{2(x^2+y^2)} dz)dy)dx \\
&= 2\int_0^1 (\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dy)dx \\
&= 2(I - \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{3}}(x^2+y^2)dy)dx) \\
&= 2(I - \frac{4}{\sqrt{3}}) \\
&= 2(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{\sqrt{3}}).
\end{aligned}$$

Exercice 4 (4 points)**.** On se propose de résoudre l'EDP suivante

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x\sqrt{x^2+y^2}$$

On considère le système de coordonées polaires $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ sont données par **(1 point)**

$$\begin{cases}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},
\end{cases}$$

2. Résolution de L'EDP. **(3 points)**
   L'équation devient
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = r^2 \cos\theta. (\textbf{ 2 point })$$
   Donc,
$$f(x,y) = r^2 \sin\theta + g(r) = y\sqrt{x^2+y^2} + g(\sqrt{x^2+y^2}). \ (\textbf{1 point })$$
   où g est une fonction dérivable.