Université de Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de GM

Module : Mecanique Analytique
L3 GM
2018/2019

Ms 55

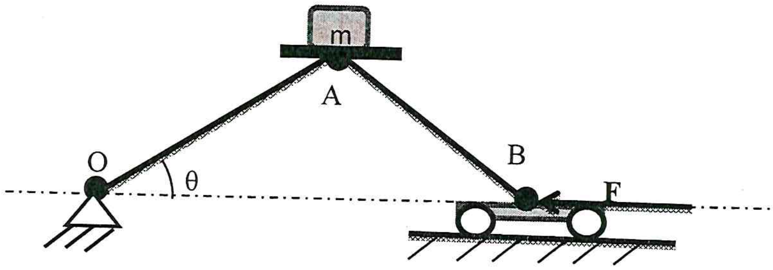
EMD

Durée :1h30

Ex1 (9pts):

Une masse m est placée en A et reliée par deux barres rigides sans masse aux points O et B. Les barres (OA = AB = L) sont articulées entre elles en A, le support de l'articulation O est fixe et le patin articulé en B (sans masse) peut glisser sans frottement le long d'un axe horizontal; ces articulations sont supposées parfaites. En appliquant le principe des travaux virtuels,

1. Trouver la force F qu'il faut appliquer pour que le système reste en équilibre?
2. Déterminer la valeur de la réaction en B.



Ex02 (11):

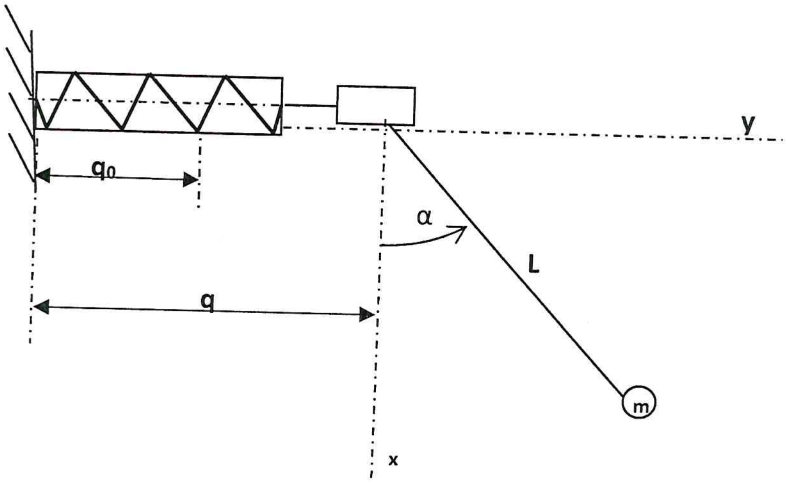


Figure: Pendule plan, dont le point de suspension oscille horizontalement

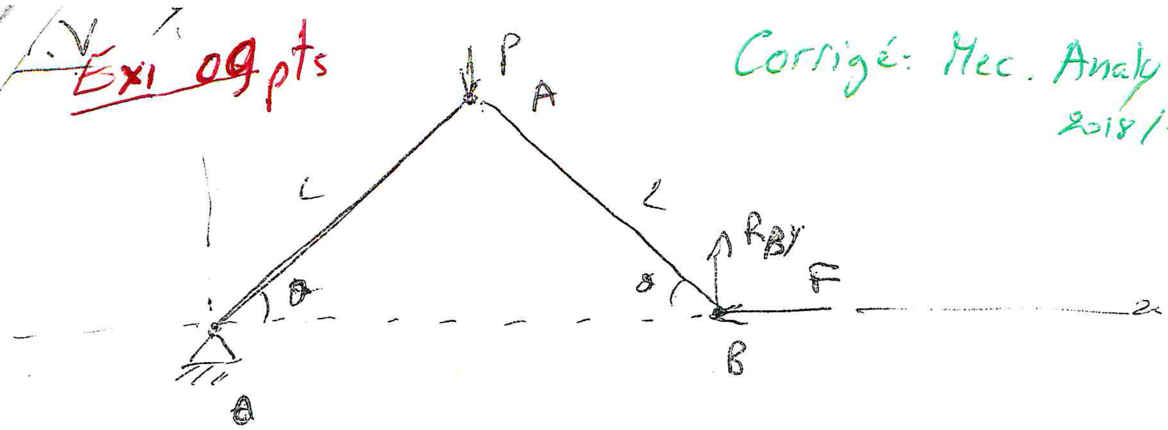
Soit une masse m accrochée à un fil non élastique de longueur **L** constante, oscillant dans le plan (x, y). Le fil est accroché à un bloc de masse négligeable qui oscille horizontalement.

Déterminer :

1. Le nombre de degré de liberté du système. (2pts)
2. L'expression de l'énergie potentielle. (2pts)
3. L'expression de l'énergie cinétique. (2pts)
4. L'équation du mouvement de la masse m en utilisant la méthode de Lagrange.(5pts)

Corrigé: Mec. Analy. MS55 2018/19

Exi 09 pts



$$\vec{r}_A = \vec{OA}\begin{pmatrix} L\cos\theta \\ L\sin\theta \end{pmatrix} \to \delta r_A = \begin{pmatrix} -L\sin\theta \\ L\cos\theta \end{pmatrix}\delta\theta$$ ①

$$\vec{r}_B = \vec{OB}\begin{pmatrix} 2L\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \to \delta\vec{r}_B \begin{pmatrix} -2L\sin\theta\,\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$ ①

PTV

$$\vec{P}.\delta\vec{r}_A + \vec{F}\delta\vec{r}_B + \cancel{\vec{R}_{By}\,\delta\vec{r}_B} = 0 .$$ ①

$\cos\frac{\pi}{2} = 0 .$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -L\sin\theta\,\delta\theta \\ L\cos\theta\,\delta\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2L\sin\theta\,\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

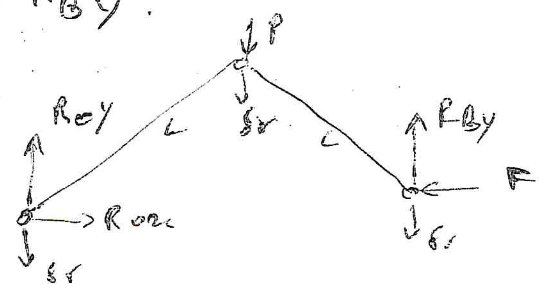
$$-P\cancel{L}\cos\theta\,\cancel{\delta\theta} + 2F\cancel{L}\sin\theta\,\cancel{\delta\theta} = 0 .$$

$$F = \frac{P}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \to \boxed{F = \frac{1}{2}P\cot\theta}$$ ③

2. calcul de reaction R_{By}.

Sym → $R_{oy} = R_{By}$

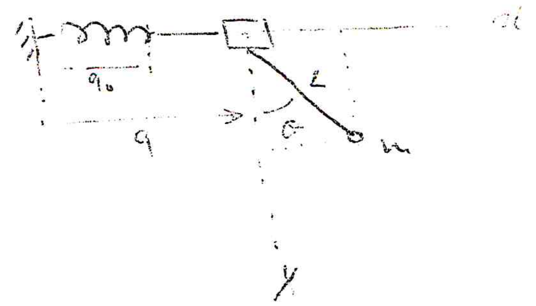
on va choisir un déplacement Rigide δr



$$P.\delta r + R_{oy}\delta r + R_{By}.\delta r = 0$$

$$R_{By} = \frac{P}{2}$$ ③

Exo2 : 11 pts.



1. Deux coord. Generalisé q et θ. 2pts

$$\begin{cases} x = q + L\sin\theta \\ y = L\cos\theta \end{cases} \quad \ldots (1)$$

2. l'energie potentiell

$$V_1 = -\int_0^{L\cos\theta} mg\,dy = -mgL\cos\theta \quad \ldots (2)$$

$$V_2 = +\frac{1}{2}K(q-q_0)^2 \quad \ldots (3)$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2}K(q-q_0)^2 - mgL\cos\theta \quad \ldots (4)}$$ 2pts

3. l'energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \ldots (5)$$

de (1) $\rightarrow$ $\begin{cases} \dot{x} = \dot{q} + L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \ldots (6)$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{q}L\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{q}L\dot{\theta}\cos\theta)}$$ 2pts

3. Lagrangien : $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{q}L\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{2}K(q-q_0)^2 + mgL\cos\theta$

Eq. de Mvt : (1) : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q^{nc}$ 1pts

(2) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m(\dot{q} + L\dot{\theta}\cos\theta) \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m(\ddot{q} + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = K(q-q_0)$$

Dans notre cas pas de force non conservative.

$$\to \beta^{NC} = 0$$

Equt. du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \to \boxed{m\ddot{q} + K(q-q_0) + mL(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) =}$$

2pts

par rapport à θ :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(L^2\dot{\theta} + \dot{q}L\cos\theta) \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL(\ddot{\theta}L + (\ddot{q}\cos\theta - \dot{\theta}\sin\theta.\dot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{q}L\dot{\theta}\sin\theta - mgL\sin\theta$$

Equt. du mouvement / à θ :

$$mL^2\ddot{\theta} + mL(\ddot{q}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{q}\sin\theta) + mL(\dot{q}\sin\theta + g\sin\theta) = 0$$

$$L\ddot{\theta} + (\ddot{q}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{q}\sin\theta) + \sin\theta(\dot{\theta}\dot{q} + g) = 0$$

$$\boxed{L\ddot{\theta} + \ddot{q}\cos\theta + g\sin\theta = 0}$$

2pts