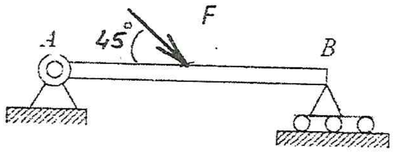
EXAMEN

Exercice 1 (4 pts)

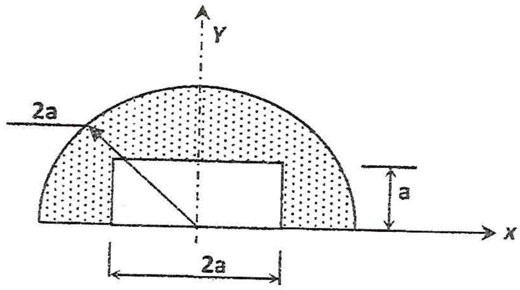
Une barre $AB=L$ est liée en A par une articulation cylindrique et à son extrémité B, elle repose sur un appui rouleau. Une force de $200\ N$ agit en son milieu sous un angle de $45°$ dans le plan vertical. La barre a un poids de $50\ N$.



Déterminer les réactions aux extrémités A et B.

Exercice 2 (6pts)

Déterminer le centre d'inertie de la surface homogène suivante.



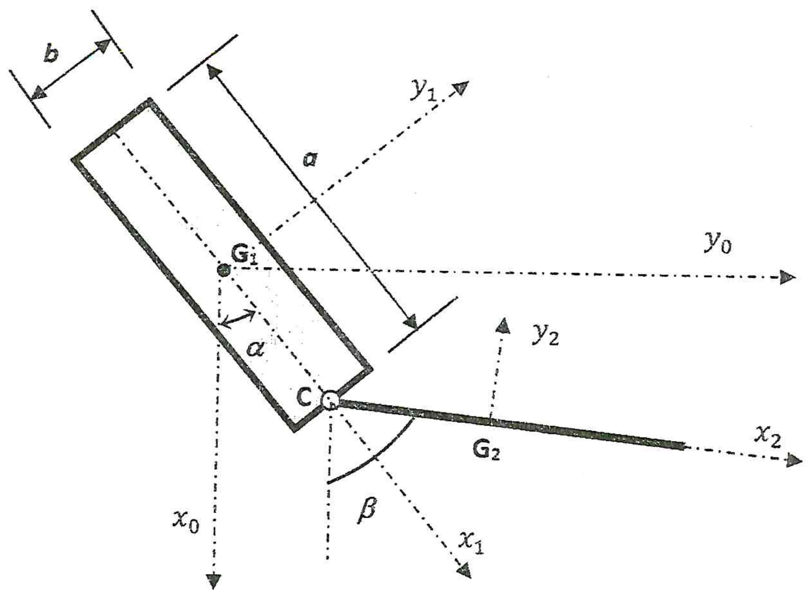
Problème (10pts)

Soit un système composé d'une plaque homogène rectangulaire de longueur a et de largeur b, de centre de masse G_1 en rotation à une vitesse angulaire fixe autour de point G_1 dans le plan(x_0, y_0). Et d'une tige homogène de longueur a, de centre de masse G_2 en rotation autour de point C, $R_0(G_1, x_0, y_0, z_0)$ est le repère de référence.

Déterminer :

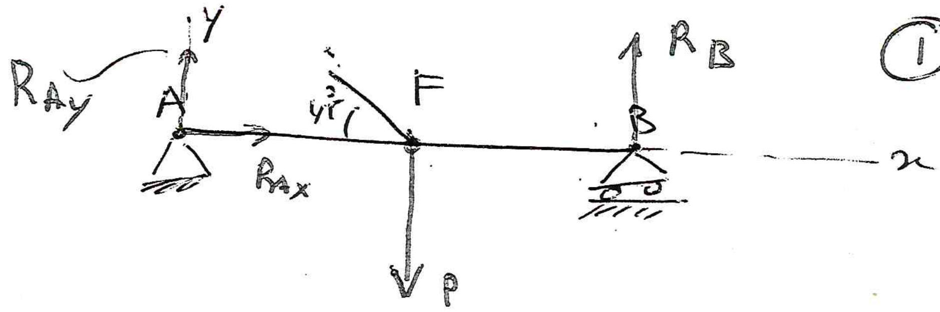
1. La matrice d'inertie de la plaque par rapport au repère $R_1(G_1, x_1, y_1, z_1)$,
2. Le moment cinétique de la plaque par rapport au point G_1,
3. La vitesse du point G_1 exprimée dans le repère $R_1(G_1, x_1, y_1, z_1)$,
4. L'énergie cinétique de la plaque,
5. La vitesse du point G_2 exprimée dans le repère $R_1(G_1, x_1, y_1, z_1)$,
6. Le moment cinétique de la tige par rapport au point G_1,
7. L'énergie cinétique de la tige.

Déduire l'énergie cinétique du système.



Corrigé. Mec. Ratio. MS 322. L3 G. 2018/19

Solution Ex 1 :



(1)

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_B + R_{Ay} = P + \frac{F\sqrt{2}}{2} & (\text{proj}/x) \text{ ---- } (1) \\ R_{Ax} = -\frac{F\sqrt{2}}{2} & (\text{proj}/y) \text{ ---- } (2) \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{/A} = 0 \rightarrow R_B . L = P.\frac{L}{2} + \frac{F\sqrt{2}}{2}.\frac{L}{2} \quad \dots\dots (3)$$

$$R_B = \frac{1}{2}\left(P + \frac{F\sqrt{2}}{2}\right) \quad \dots\dots (4)$$

Donc de (1) et (4) :

$$R_{Ay} = P + \frac{F\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\left(P + \frac{F\sqrt{2}}{2}\right) \quad \dots (5)$$

$$R_{Ay} = \frac{1}{2}\left(P + \frac{F\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{----} \quad (6)$$

AN :

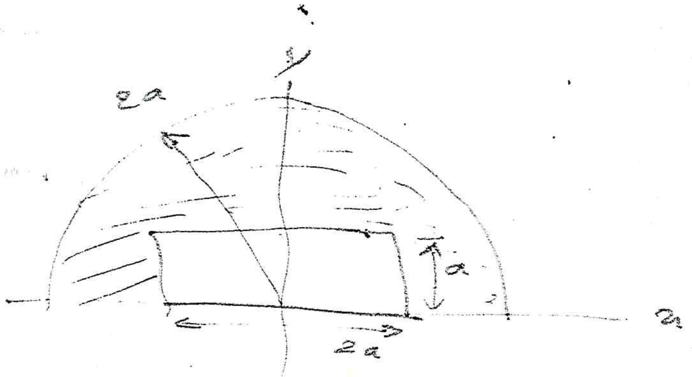
de eq. (2) : $R_{Ax} = -141.42\ N$ (0.5)

eq. (4) : $R_B = 95.71\ N$ (1)

eq. (6) : $R_{Ay} = 95.71\ N$ (0.5)

d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 170.76\ N.$ (1)

Ex 2 (6 pts)



$$x_G = \frac{x_{G_1} m_1 - m_2 x_{G_2}}{m_1 - m_2} = 0 \text{ sym} \quad (1)$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} m_1 - m_2 y_{G_2}}{m_1 - m_2} = \frac{y_{G_1} S_1 - y_{G_2} S_2}{S_1 - S_2}$$

$$y_{G_1} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi} = \frac{4}{3}\frac{2a}{\pi} \ (1) \ ; \quad S_1 = \frac{\pi (2a)^2}{2} = 2\pi a^2 \ (1)$$

$$y_{G_2} = \frac{a}{2} \ (1) \qquad ; \quad S_2 = 2a^2 \ (1)$$

$$y_G = \frac{\frac{8a}{3\cancel{\pi}} \cdot (2\cancel{\pi}\cancel{a^2}) - \frac{a}{2} \cdot (\cancel{2}\cancel{a^2})}{2\pi \cancel{a^2} - 2\cancel{a^2}} = \frac{\frac{16}{3}a - a}{2\pi - 2}$$

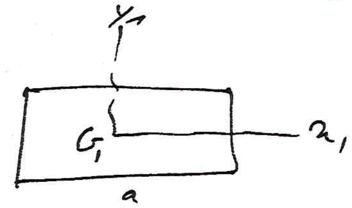
$$\boxed{y_G = \frac{13\, a}{6(\pi - 1)}} \quad (1)$$

6

Sol: Ex. 3, 10 pts

1. La Matrice d'inertie de la plaque / $R_1(G_1, x_1, y_1, z_1)$. (1)

$$\mathcal{J}_{G_1} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$



2. Le moment Cinétique de la plaque / G_1. (1)

$$\overrightarrow{L}_{G_1} = [\mathcal{J}_{G_1}]\,\vec{\omega}_{R_1/R_0} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)\dot{\alpha}\,\vec{K}_1$$

3. La vitesse du point G_1 dans R_1. $\overrightarrow{V}_{G_1} = \vec{0}$. (1)

4. L'energie Cinétique de la plaque: (1)

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{1/0}\,[\mathcal{J}_{G_1}]\,\vec{\omega}_{1/0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{L}_G\,\vec{\omega}_{1/0} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{12}(a^2+b^2)\dot{\alpha}\,\vec{K}_1\right)\left(\dot{\alpha}\,\vec{K}_1\right)$$

$$T = \frac{M}{24}(a^2+b^2)\dot{\alpha}^2$$

5. La vitesse du point G_2 exprimée dans R_1.

$$\overrightarrow{V}_{G_2} = \left.\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{OG_2}$$ (1)

$$= \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\sin(\beta-\alpha) \\ \frac{a}{2}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\cos(\beta-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(\beta-\alpha) \\ \frac{a}{2}\sin(\beta-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V}_{G_2} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}\sin(\beta-\alpha)\dot{\beta} \\ \frac{a}{2}\cos(\beta-\alpha)\dot{\beta} + \frac{a}{2}\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$ (1)

/3

6. Moment Cinétique de la tige / G_1.

$$\vec{L}_{G_1}(\text{tige}) = \vec{L}_{G_2}(\text{tige}) + \vec{OG_2} \wedge M\vec{V}_{G_2}$$ 1 (Théorème de Koënig (O ≡ G_2)

$$= \left[J_{G_2}(\text{tige})\right]\vec{\omega}_{2/0} + \vec{OG_2} \wedge M\vec{V}_{G_2}$$

$$= \frac{M}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(\beta-\alpha) \\ \frac{a}{2}\sin(\beta-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge M.\begin{pmatrix} -\frac{a}{2}\sin(\beta-\alpha)\dot{\beta}. \\ \frac{a}{2}\cos(\beta-\alpha)\dot{\beta} + \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Question 5.

$$\vec{L}_{G_1}(\text{tige}) = \frac{Ma^2}{4}\left(\frac{4}{3}\dot{\beta} + \dot{\alpha} + \cos(\beta-\alpha)(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\right)\vec{k}$$ 1

7. L'énergie cinétique de tige : mouvement composé. 1

$$T_2(\text{tige}) = \frac{1}{2}M\vec{V}_{G_2}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{L}_{G_2}(\text{tige}).\vec{\omega}_{R_2/R_0}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{a}{2}\right)^2\left[\dot{\alpha}^2 + \frac{4}{3}\dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\right]$$

7. Energie du système 1

$$T = T_1 + T_2$$