Examen en traitement du signal

M1 Imagerie médicale

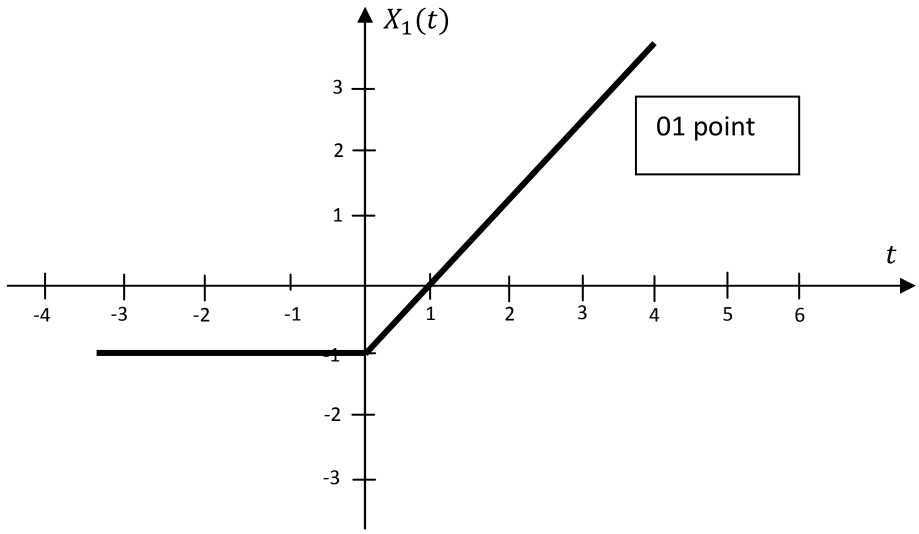
Corrigé

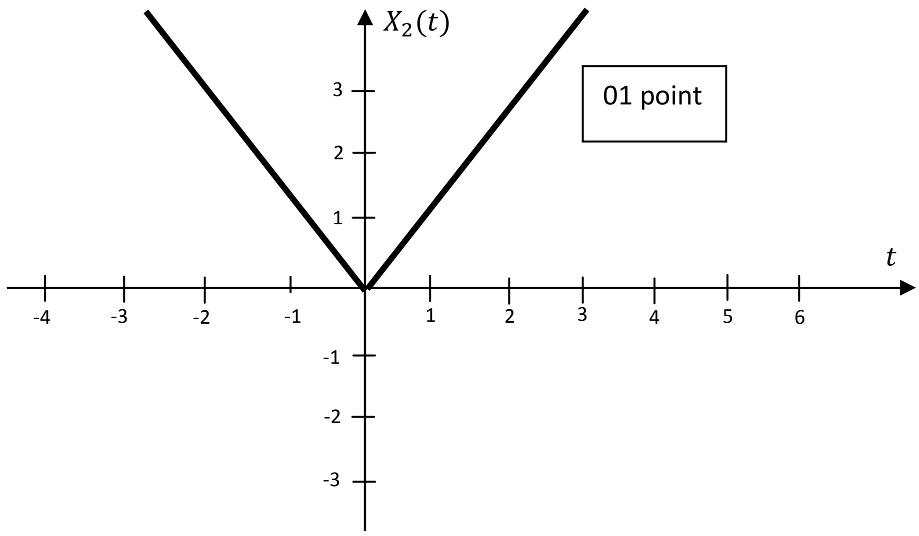
Exercice n°1 : (04 points)

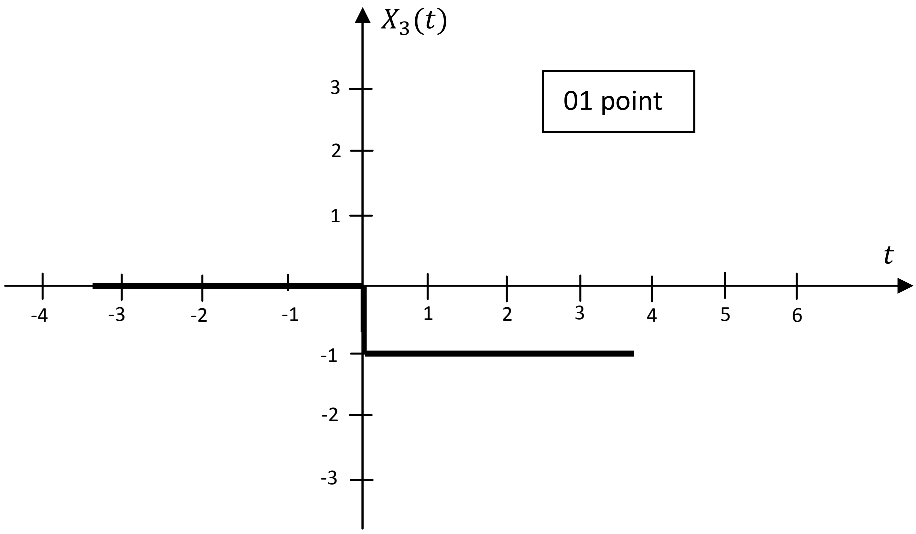
Tracer les différents signaux suivants :

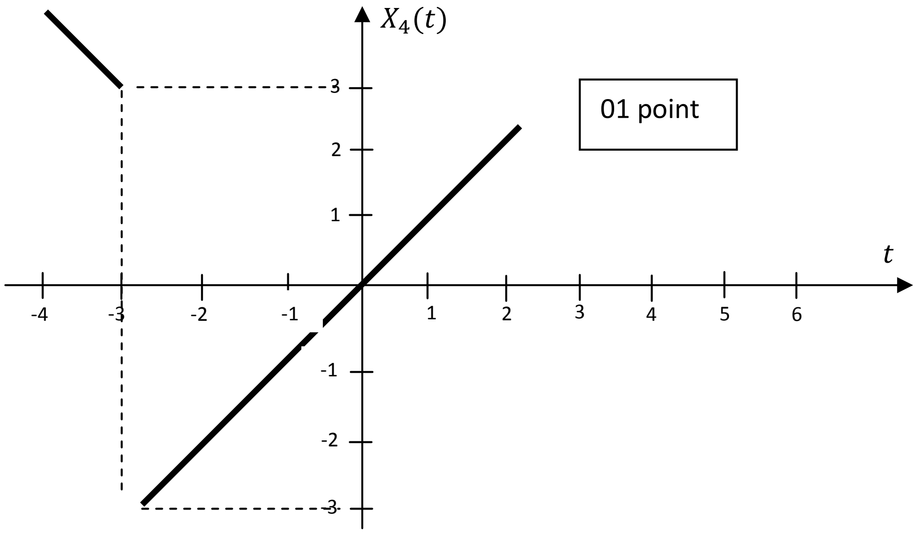
$X_1(t) = tu(t) - 1$; $X_2(t) = tsgn(t)$; $X_3(t) = -u(t)$; $X_4(t) = tsgn(t+3)$

Solution









Exercice n°2: (04 points)

1) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction suivante (02 points):

$$x_1(t) = e^{-t}u(t)$$

2) Décomposer en série de Fourier la fonction suivante (02 points):

$$x_2(t) = 1 + 0.5\cos\left(2\pi[3f_0]t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(2\pi[5f_0]t\right)$$

Solution

1)

$$X_1(f) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-j2\pi ft}dt = -\frac{1}{a+j2\pi f}e^{-t(1+j2\pi f)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

2)

$$a_0 = 2 \qquad b_3 = -0.5 \qquad b_5 = 2$$

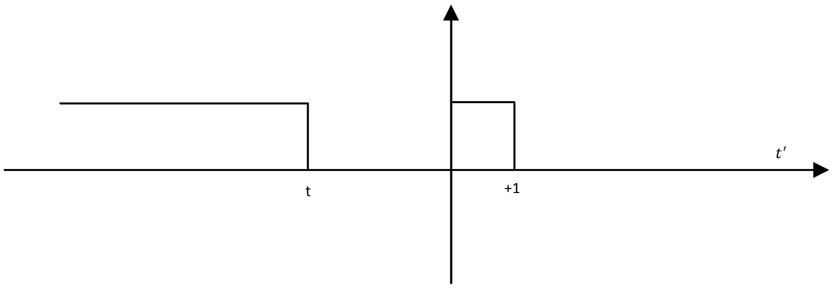
Exercice n°3: (04 points)

Déterminez le produit de convolution des signaux suivants :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & pour \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

$$y(t) = u(t)$$

Solution



$$Soit\ z(t) = x(t) \otimes y(t)$$

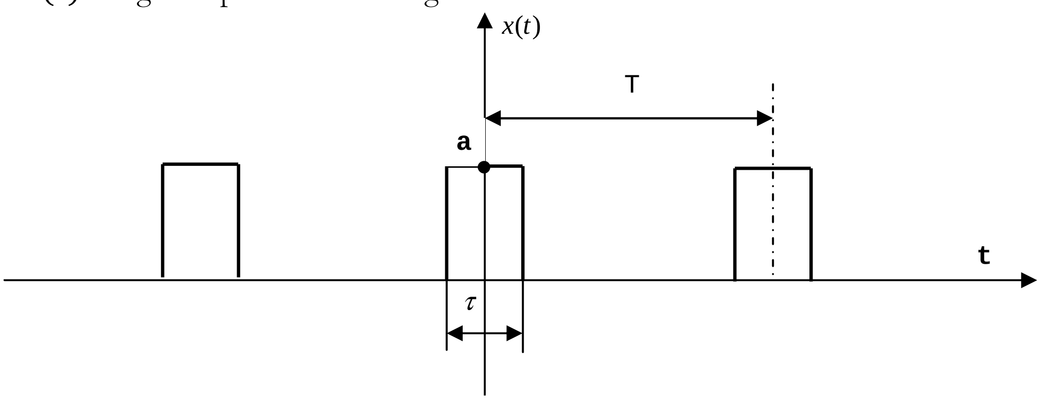
$pour\ t < 0; z(t) = 0$

$pour\ 0 \leq t < 1; z(t) = \int_0^t dt' = t$

$pour\ t \geq 1; z(t) = \int_0^1 dt' = 1$

Exercice n°4:(04 points)

Soit $x(t)$ le signal représenté sur la figure suivante :



1) Calculer les coefficients C_n de la série de Fourier du signal x(t) (02 points).
2) Déterminer la densité spectrale de puissance du signal x(t) (02 points).

Solution

1) Les coefficients C_n de la série de Fourier sont donnés par :

$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt$ où $T = \frac{1}{f_0}$ est la période du signal.

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} a e^{-j2\pi n f_0 t}dt = -\frac{a}{T}\frac{1}{j2\pi n f_0}\left[e^{-j2\pi n f_0 t}\right]_{-\tau/2}^{+\tau/2}$$

$$= -\frac{a}{T}\frac{1}{j2\pi n f_0}(e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{j\pi n f_0 \tau})$$

$$= \frac{a\tau}{T}\frac{\sin(\pi n\frac{\tau}{T})}{\frac{\pi n\tau}{T}}$$

2) La densité spectrale de puissance est alors :

$$|C_n|^2 = (\frac{a\tau}{T}\frac{\sin\left(\pi n\frac{\tau}{T}\right)}{\frac{\pi n\tau}{T}})^2$$

<u>Exercice n°5:(04 points)</u>

Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{1}{(p-1)}\frac{1}{(p+2)}$$

$$F_2(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)}$$

Solution :

$$f_1(t) = Ae^{+t} + Be^{-2t}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t) - e^{-t})$$