MATH1 AU 2018/2019

Corrigé de l'EF.

Exercice 1 - 6pts -

$A = \left\{ \frac{1-n^2}{1+n^2} \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$

1/ $\forall n \in \mathbb{N} : \quad -1-n^2 < 1-n^2 \leq 1+n^2$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} : \quad -1 < \frac{1-n^2}{1+n^2} \leq 1$ (1pt)

A st donc borné

2/ Posons $U_n = \frac{1-n^2}{1+n^2}$

- $U_0 = 1$ donc $\sup A = 1$ ... (1pt)
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-n^2}{n^2} = -1$

$\Rightarrow \inf A = -1$ ... (1pt)

3/ $\sup A = 1 = U_0 \in A \Rightarrow \operatorname{Max} A = 1$ ... (0,5pt)

$\inf A \notin A$, $\min A$ n'existe pas ... (0,5pt)

4/ $\frac{1-n^2}{1+n^2} = -0{,}8 \Leftrightarrow \frac{1-n^2}{1+n^2} = -\frac{8}{10}$

$\Leftrightarrow -8(1+n^2) = 10(1-n^2)$

$\Leftrightarrow 2n^2 = 18$

$\Leftrightarrow n^2 = 9$

$\Leftrightarrow (n = 3 \vee n = -3)$ ... (2pts)

– 8 pts –

Exercice 2 : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = 1 - \frac{\sin(2x)}{x}$

1/ $f(\pi) = 1$, $f(-\pi) = 1$ . . . (1 pt)

f n'est pas injective car $f(\pi) = f(-\pi)$
pourtant $\pi \neq -\pi$ (1 pt)

2/ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - 2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 1 - 2 = -1$ . . (1 pt)

(Car $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$)

3/ La limite de f en 0 existe et est finie donc
f est prolongeable en 0 . . . (1 pt)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
. . . (1 pt)

4/ • g est continue sur $[0, \pi)$. (1 pt)

• $g(0) = -1$, $g(\pi) = 1$
$g(0) \cdot g(\pi) < 0$ (1 pt)

donc $\exists\, c \in]0, \pi[$ tq $g(c) = 0$. (1 pt)

Exercice 3 : — 6pts —

$f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$

1/ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2}$

car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 2pt

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

2/ D.L d'ordre 4 en 0 de "cos" :

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$ . . . (1pt)

on a au voisinage de 0 :

$f(x) = \dfrac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^2} = \dfrac{x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}{x^2}$

. . . (1pt)

$f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$

3/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - \frac{1}{2}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{x}{8} + o(x)$ (1pt)

$= 0$ . . .

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
. . (1pt)