Dépt. TTL L2 S3 **Sujet** Examen TS312 (**ondes et vibrations**) Janvier 2018

Exercices 1 *(10 points)*

1) Etablir les équations différentielles du système oscillatoire mécanique de la figure 1.

2) On donne l'excitation $\overline{F}(t) = F_0 \, e^{i\Omega t}$.

Les solutions x_1 (t) et x_2 (t) du régime permanant étant du même type que l'excitation, donner l'écriture matricielle des équations différentielles en amplitudes complexes $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$.

En déduire les expressions de ces amplitudes complexes $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$.

3) Trouver lorsque $\beta = 0$, les pulsations de résonance existante.

4) Etablir les équations différentielles en courant i_1 et i_2 puis en charges q_1 et q_2 du système oscillatoire électrique de la figure 2, $\overline{U}(t) = U_0 \, e^{i\Omega t}$.

5) Y a-t-il analogie entre ces deux systèmes ? Si oui, donner les correspondances entre les éléments mécaniques et électriques.

En déduire, lorsque R = 0 les pulsations de résonance électrique existante.

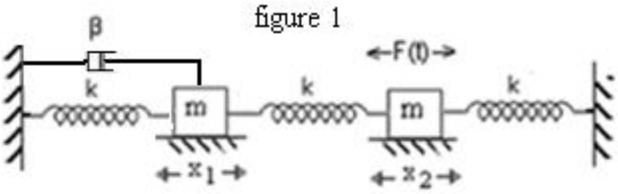


figure 1

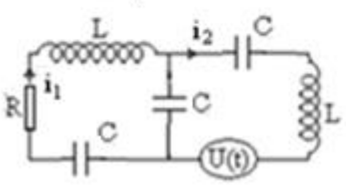


figure 2

Exercice 2 *(10 points)*

Soit 2 champs électriques :

$$\vec{E1} \begin{cases} 10.\sin(10^8 t - k.z) \\ 10.\cos(10^8 t - k.z) \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{E2} \begin{cases} 10.\sin(10^8 t - k.z) \\ -10.\cos(10^8 t - k.z) \\ 0 \end{cases}$$

1) Quelle est la direction de propagation, les valeurs de la période T de la longueur d'onde λ et du nombre d'onde k des 2 champs.

2) Quelles sont la nature et le sens de leurs polarisations.

3) Déterminer le champ électrique E résultant.

Quelle est sa nature, et le sens de sa polarisations.

4) Déterminer le champ magnétique H correspondant à E.

Quelle est sa nature, et le sens de sa polarisation.

On rappel que : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\delta \vec{B}}{\delta t}$; $\mu_0 = 4\pi \, 10^{-7}$

5) Représenter E et H à l'instant t = 0 .

Dépt. TTL L2 S3 **Réponses** Examen TS312 (**ondes et vibrations**) Janvier 2018

Réponse 1

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}_1 = -\beta \dot{x}_1 - k x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\,\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k x_2 + F(t) \end{cases} \quad \textbf{\textit{1 pt}} \longrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\beta}{m}\dot{x}_1 + 2\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 = \frac{F(t)}{m} \end{cases} \quad \textbf{\textit{½ pt}}$$

Les solutions du régime permanant sont du même type que l'excitation

$$\overline{F(t)} = F_0\, e^{i\Omega t} \longrightarrow \overline{x}_{\substack{1\\2}}(t) = X_{\substack{1\\2}}\, e^{i(\Omega t + \varphi_{\substack{1\\2}})} = \overline{X}_{\substack{1\\2}}\, e^{i\Omega t} \quad \text{avec} \quad \overline{X}_{\substack{1\\2}} = X_{\substack{1\\2}}\, e^{i\varphi_{\substack{1\\2}}} \qquad \textbf{\textit{½ pt}}$$

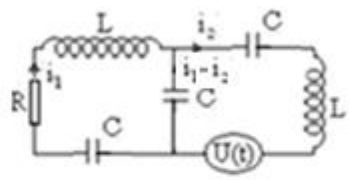
$$\longrightarrow \begin{array}{l}\text{écriture matritielle}\\ \text{des équations différentielle}\end{array} : \begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2\frac{k}{m} + i\Omega\frac{\beta}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\Omega^2 + 2\frac{k}{m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{m} \end{vmatrix} \begin{array}{l}\text{système}\\ \text{de 2 équations}\\ \text{à 2 inconus}\end{array} \quad \textbf{\textit{1,5 pt}}$$

$$\text{déterminant} = \left(-\Omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + 2\frac{k}{m} + i\Omega\frac{\beta}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{\text{dét}}\left(\frac{k}{m}\frac{F_0}{m}\right) \quad \textbf{\textit{½ pt}} \qquad \overline{X}_2 = \frac{1}{\text{dét}}\left[\frac{F_0}{m}\left(-\Omega^2 + 2\frac{k}{m} + i\Omega\frac{\beta}{m}\right)\right] \quad \textbf{\textit{½ pt}}$$

$$\beta = 0 \quad \text{résonnance} = \text{amplitudes infinies} \longrightarrow \det = 0$$

$$\text{dét} = \left(-\Omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{k^2}{m^2} = \left(-\Omega^2 + 3\frac{k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0 \quad \textbf{\textit{½ pt}} \longrightarrow \begin{cases} \Omega_{r_+} = \sqrt{3\frac{k}{m}} & \textbf{\textit{½ pt}} \\ \Omega_{r_-} = \sqrt{\frac{k}{m}} & \textbf{\textit{½ pt}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int(i_1 - i_2)dt + \frac{1}{C}\int i_1 dt + R\,i_1 = 0 \\ L\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C}\int(i_1 - i_2)dt + \frac{1}{C}\int i_2 dt = U(t) \end{cases} \quad \textbf{\textit{1 pt}}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + \frac{R}{L}\dot{q}_1 + \frac{2}{LC}q_1 - \frac{1}{LC}q_2 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \frac{2}{LC}q_2 - \frac{1}{LC}q_1 = \frac{U(t)}{L} \end{cases} \quad \textbf{\textit{1 pt}}$$

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow q & \\ m \rightarrow L & \beta \rightarrow R \\ k \rightarrow \frac{1}{C} & F(t) \rightarrow U(t) \end{array} \quad \textbf{\textit{1 pt}} \longrightarrow \begin{cases} \Omega_{r_+} = \sqrt{\frac{3}{LC}} & \textbf{\textit{½ pt}} \\ \Omega_{r_-} = \sqrt{\frac{1}{LC}} & \textbf{\textit{½ pt}} \end{cases}$$

Réponse 2

$\vec{k}\vec{r} = k\vec{u}\,\vec{r} = k.z \rightarrow \vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{k} = \vec{k} \rightarrow \vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ champs électriques d'ondes sinusoïdales planes se propageant suivant l'axe des z *½ pt*

$\omega = 10^8 = \dfrac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi 10^{-8}$ s *½ pt* $\lambda = T\,c = 2\pi 10^{-8}\ 3\ 10^8 = 6\pi$ m *½ pt* $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{1}{3}$ m^{-1} *½ pt*

$$\left|\vec{E}_1\right| = \sqrt{E_{1x}^2 + E_{1y}^2} = 10 = \sqrt{E_{2x}^2 + E_{2y}^2} = \left|\vec{E}_2\right| = \text{constant}$$

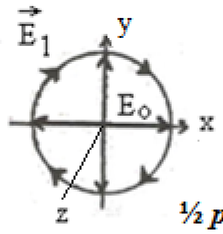
on fixe le plan d'onde à z = 0 $\rightarrow$ polarisation

	ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
	t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$3\frac{T}{4}$	T
$\vec{E}_1$	E_{1x}	0	10	0	- 10	0
	E_{1y}	10	0	- 10	0	10
$\vec{E}_2$	E_{2x}	0	10	0	-10	0
	E_{2y}	-10	0	10	0	-10

1 pt

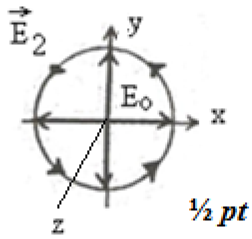
sens de polarisation

circulaire droite



½ pt

circulaire gauche



½ pt

$\rightarrow \vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ ont une polarisation circulaire

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \begin{cases} 20\sin(10^8 t - \frac{z}{3}) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$ *1 pt*

champ électrique sinusoïdal d'une onde plane se propage dans la direction des z *½ pt* et polarisation rectiligne suivant l'axe des x *½ pt*

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\delta}{\delta z}E_x\,\vec{j} = -\frac{20}{3}\cos(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$$ *½ pt*

$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{H} = 4\pi\,10^{-7}\,\vec{H} = \frac{20}{3\,10^8}\sin(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{1}{6\pi}\sin(10^8 t - \frac{z}{3})\,\vec{j}$$ *½ pt*

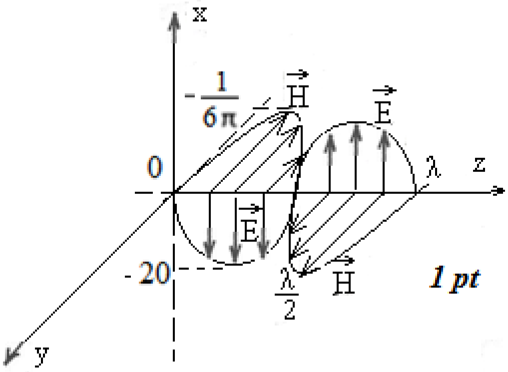
champ magnétique sinusoïdal d'une onde plane se propage dans la direction des z *½ pt*

et polarisation rectiligne suivant l'axe des y *½ pt*

t =0

kz	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
z	0	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{2}$	$3\frac{\lambda}{4}$	λ
E_x	0	- 20	0	20	0
H_y	0	$-\frac{1}{6\pi}$	0	$\frac{1}{6\pi}$	0

1 pt



1 pt