Examen final

Exercice 1 / (6 pts) / On mesure les diamètres de troncs d'arbres d'une même espèce. On étudie 400 échantillons. On obtient les résultats suivants:

Diamètre en cm	25	26	27	28	29	30
Pourcentage	10%	15%	30%	35%	5%	5%

On donne:

$$(25 \times 0.1) + (26 \times 0.15) + (27 \times 0.3) + (28 \times 0.35) + (29 \times 0.05) + (30 \times 0.05) = 27.25.$$
$$(25^2 \times 0.1) + (26^2 \times 0.15) + (27^2 \times 0.3) + (28^2 \times 0.35) + (29^2 \times 0.05) + (30^2 \times 0.05) = 744.05.$$

1. Établir le tableau statistique en fonction des effectifs et des fréquences relatives.
2. Quel est le diamètre moyen de ces troncs d'arbres?
3. Déterminer la variance puis l'écart-type de la série statistique résumée dans le tableau ci-dessus.
4. Représenter graphiquement ces résultats (juste pour les effectifs).
5. Déterminer le mode et donner son interprétation.

Exercice 2 / (6 pts) / Une étude a été menée auprès de 12 étudiants afin d'expliquer le score à un examen de mathématiques à partir du temps consacré à la préparation de cet examen. Pour chaque étudiant, on dispose: du temps de révision en heures (variable X) et du score obtenu sur 800 points (variable Y). Les résultats sont:

x_i	4	9	10	14	4	7	12	1	3	8	11	5
y_i	390	580	650	730	410	530	600	350	400	590	640	450

On donne:

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 822, \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 3495600 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 51610.$$

1. Tracer le nuage de points.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux séries. Commenter.
3. Déterminer la droite de corrélation linéaire $D(Y/X)$: $Y = aX + b$.

Exercice 3 / (5.5 pts) / Une guerre sévit depuis des années entre deux pays A et B voisins. Si on considère le pays A alors ses habitants sont 60% favorables à la paix, 16% favorables à la guerre et le reste étant sans opinions. Si on considère le pays B alors ses habitants sont 68% pour la guerre, 12% pour la paix et le reste étant sans opinions. On rencontre au hasard un individu de l'un des deux pays (cas équiprobable, c'est à dire, on a la même chance d'avoir le pays A ou B).

1. Écrire les évènements qui interviennent et tirer toute les informations (les probabilités) possibles.
2. Calculer la probabilité pour que cet individu soit sans opinions.
3. Sachant que la personne rencontrée est favorable à la guerre, calculer la probabilité qu'elle habite le pays B.

4. Sachant que la personne rencontrée est favorable à la paix, calculer la probabilité qu'elle habite le pays A.

Exercice 4 / (2.5 pts) / On a effectué une étude sur la durée de vie de composants électroniques (mesurée en heure). Soit f_X la fonction de densité de probabilité de la variables aléatoire X qui désigne cette durée, cette fonction est donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{150}{t^2}, & \text{si } t \geq 150, \\ 0, & \text{si } t < 150. \end{cases}$$

1. Vérifier que cette fonction est bien une fonction de densité de probabilité.

2. Calculer la probabilité pour qu'un composant ait une durée de vie inférieure à 250 heures.

Correction de l'examen final

Exercice 1 / (6 pts) / On mesure les diamètres de troncs d'arbres d'une même espèce. On étudie 400 échantillons. On obtient les résultats suivants:

Diamètre en cm	25	26	27	28	29	30
Pourcentage	10%	15%	30%	35%	5%	5%

On donne:

$$(25 \times 0.1) + (26 \times 0.15) + (27 \times 0.3) + (28 \times 0.35) + (29 \times 0.05) + (30 \times 0.05) = 27.25.$$
$$(25^2 \times 0.1) + (26^2 \times 0.15) + (27^2 \times 0.3) + (28^2 \times 0.35) + (29^2 \times 0.05) + (30^2 \times 0.05) = 744.05.$$

1. Établir le tableau statistique en fonction des effectifs et des fréquences relatives.
2. Quel est le diamètre moyen de ces troncs d'arbres?
3. Déterminer la variance puis l'écart-type de la série statistique résumée dans le tableau ci-dessus.
4. Représenter graphiquement ces résultats (juste pour les éffectifs).
5. Déterminer le mode et donner son interprétation.

Solution:

1. **Tableau statistique: (1.5 pts en total)**

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
25	40	0.1
26	60	0.15
27	120	0.3
28	140	0.35
29	20	0.05
30	20	0.05
Total	400	1

2. **Diamètre moyen: (0.5 pts en total)**

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i = \sum_{i=1}^{6} f_i x_i \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 27.25. \quad \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

Donc le diamètre moyen de ces troncs d'arbres est de 27.25 cm.

3. **Variance et écart-type: (1.5 pts en total)**

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{6} f_i x_i^2 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 744.05 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ Var(x) &= \overline{x^2} - \overline{x}^2 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &\cong 1.49 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ \sigma(x) &= \sqrt{Var(x)} \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &\cong 1.22. \quad \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

4. **Représentation graphique: (1.5 pts en total)**
5. **Mode et interprétation: (1 pt en total)**

   Le mode est 28 cm **(0.5 pts)** car c'est la modalité qui correspond au plus grand effectif (ou fréquence). On peut dire alors que la plus part des troncs d'arbres ont un diamètre de 28 cm. **(0.5 pts)**

Exercice 2 / (6 pts) / Une étude a été menée auprès de 12 étudiants afin d'expliquer le score à un examen de mathématiques à partir du temps consacré à la préparation de cet examen. Pour chaque étudiant, on dispose: du temps de révision en heures (variable X) et du score obtenu sur 800 points (variable Y). Les résultats sont:

x_i	4	9	10	14	4	7	12	1	3	8	11	5
y_i	390	580	650	730	410	530	600	350	400	590	640	450

On donne:

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 822, \quad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 3495600 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 51610.$$

1. Tracer le nuage de points.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux séries. Commenter.
3. Déterminer la droite de corrélation linéaire $D(Y/X)$: $Y = aX + b$.

Solution:

1. **Nuage de points: (1 pt en total)**
2. **Coefficient de corrélation linéaire: (4 pts en total)**

   Pour la variable statistique X on a:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{88}{12} \cong 7.33 \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = \frac{822}{12} \cong 68.5 \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

$$Var(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \cong 14.73 \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{Var(x)} \cong 3.84. \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

   D'autre part, pour la variable statistique Y on a:

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{12} y_i = \frac{6320}{12} \cong 526.66 \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{12} y_i^2 = \frac{3495600}{12} = 291300 \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

$$Var(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2 \cong 13922.23 \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

$$\sigma(y) = \sqrt{Var(y)} \cong 117.99. \quad \textbf{(0.25 pts)}$$

   On peut aussi calculer la covariance entre X et Y comme suit:

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{12} x_i y_i \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &= \frac{51610}{12} \cong 4300.83 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ Cov(x,y) &= \overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y} \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 440.41. \quad \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

Par suite, le coefficient de corrélation linéaire $R(x, y)$ est donné par:

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \frac{Cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &\cong 0.97. \quad \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

Puisque le coefficient de corrélation linéaire $R(x, y)$ est très proche de 1, on peut dire qu'il y'a une forte corrélation linéaire entre X et Y. **(0.5 pts)**

3. **Droite de corrélation linéaire** $Y = aX + b$**: (1 pt en total)**

   On commence par calculer les coefficients a et b comme suit:

$$\begin{aligned} a &= \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &\cong 29.89 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ b &= \overline{y} - a\overline{x} \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ &\cong 307.57 \quad \textbf{(0.25 pts)}. \end{aligned}$$

   Par suite la droite de corrélation linéaire $Y = aX + b$ est donnée par:

$$Y = 29.89X + 307.57.$$

Exercice 3 / (5.5 pts) / Une guerre sévit depuis des années entre deux pays A et B voisins. Si on considère le pays A alors ses habitants sont 60% favorables à la paix, 16% favorables à la guerre et le reste étant sans opinions. Si on considère le pays B alors ses habitants sont 68% pour la guerre, 12% pour la paix et le reste étant sans opinions. On rencontre au hasard un individu de l'un des deux pays (cas équiprobable, c'est à dire, on a la même chance d'avoir le pays A ou B).

1. Écrire les évènements qui interviennent et tirer toute les informations (les probabilités) possibles.
2. Calculer la probabilité pour que cet individu soit sans opinions.
3. Sachant que la personne rencontrée est favorable à la guerre, calculer la probabilité qu'elle habite le pays B.
4. Sachant que la personne rencontrée est favorable à la paix, calculer la probabilité qu'elle habite le pays A.

Solution:

1. **Écrire les évènements qui interviennent et tirer toute les informations (les probabilités) possibles: (3 pts en total)**

   Soit
   A: Le pays A. **(0.25 pts)**
   B: Le pays B. **(0.25 pts)**
   P: Pour la guerre (favorable à la guerre). **(0.25 pts)**
   C: Contre la guerre (favorable à la paix). **(0.25 pts)**
   S: Sans opinion. **(0.25 pts)**

   À partir de l'exercice on a les informations suivantes:

$$\begin{array}{ll} P(A) = P(B) = 0.5 \quad \textbf{(0.25 pts)} & \\ P(P/A) = 0.16 \quad \textbf{(0.25 pts)} & P(P/B) = 0.68 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ P(C/A) = 0.6 \quad \textbf{(0.25 pts)} & P(C/B) = 0.12 \quad \textbf{(0.25 pts)} \\ P(S/A) = 0.24 \quad \textbf{(0.25 pts)} & P(S/B) = 0.2. \quad \textbf{(0.25 pts)} \end{array}$$

2. **Probabilité que l'individu soit sans opinions: (0.5 pts en total)**

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) \ \ \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 0.22. \ \ \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

3. **Sachant que la personne rencontrée est favorable à la guerre, probabilité qu'elle habite le pays B: (1 pt en total)**

   On a:

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P/A)P(A) + P(P/B)P(B) \ \ \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 0.42. \ \ \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

   Donc:

$$\begin{aligned} P(B/P) &= \frac{P(P/B)P(B)}{P(P)} \ \ \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 0.8. \ \ \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

4. **Sachant que la personne rencontrée est favorable à la paix, probabilité qu'elle habite le pays A: (1 pt en total)**

   On a:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B) \ \ \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 0.36. \ \ \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

   Donc:

$$\begin{aligned} P(A/C) &= \frac{P(C/A)P(A)}{P(C)} \ \ \textbf{(0.25 pts)} \\ &= 0.83. \ \ \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

Exercice 4 / (2.5 pts) / On a effectué une étude sur la durée de vie de composants électroniques (mesurée en heure). Soit f_X la fonction de densité de probabilité de la variables aléatoire X qui désigne cette durée, cette fonction est donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{150}{t^2}, & \text{si } t \geq 150, \\ 0, & \text{si } t < 150. \end{cases}$$

1. Vérifier que cette fonction est bien une fonction de densité de probabilité.
2. Calculer la probabilité pour qu'un composant ait une durée de vie inférieure à 250 heures.

$\boxed{\textbf{Solution:}}$

1. **Fonction de densité de probabilité: (1.5 pts en total)**

   On remarque d'abord que la fonction $f_X(t)$ est toujours positive **(0.5 pts)** puis on calcule l'intégrale suivante:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt &= \int_{150}^{+\infty} \frac{150}{t^2}dt \ \ \textbf{(0.25 pts)} \\ &= \left[\frac{-150}{t}\right]_{150}^{+\infty} \ \ \textbf{(0.5 pts)} \\ &= 1. \ \ \textbf{(0.25 pts)} \end{aligned}$$

   Donc la fonction $f_X(t)$ est bien une fonction de densité de probabilité.

2. **Probabilité pour qu'un composant ait une durée de vie inférieure à** 250 **heures: (1 pt en total)**

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{250} f_X(t)dt &= \int_{150}^{250} \frac{150}{t^2} dt \quad \textbf{(0.5 pts)} \\
&= \left[\frac{-150}{t} \right]_{150}^{250} = 0.4. \quad \textbf{(0.5 pts)}
\end{aligned}
$$